

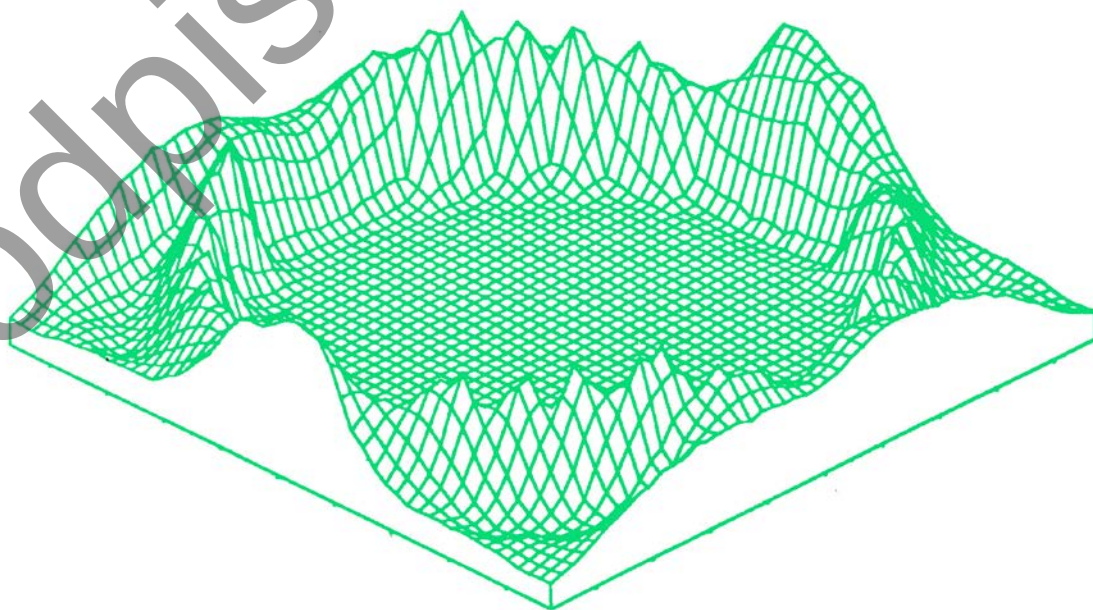
ISSN 1029-6670



ИЗДАНИЕ  
ИПРИМ РАН

# МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ИЮЛЬ-СЕНТЯБРЬ 2022  
ТОМ 28, №3



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

**ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС: ПН170**

**в каталоге «Подписные издания»  
официального каталога АО «Почта России»**

**<https://podpiska.pochta.ru/>**

**Информацию о журнале можно получить в Internet**

**<http://mkmk.ras.ru>**

**Полнотекстовые версии статей Журнала доступны  
по подписке на сайте Научной электронной  
библиотеки: [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)**

# Механика композиционных материалов и конструкций

*Всероссийский научный журнал*

**том 28      №3      2022      июль-сентябрь**

Основан в январе 1995 г.  
Выходит ежеквартально

## **Учредители:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт прикладной механики Российской академии наук  
и Общественная академия знаний

Журнал "Механика композиционных материалов и конструкций" издается Институтом прикладной механики Российской Академии наук с января 1995 года. Журнал посвящен проблемам современной механики композиционных материалов и их применения в различных конструкциях и публикует результаты фундаментальных и прикладных исследований по направлениям: механика структурированных, неоднородных и гетерогенных сред со сложными реологическими свойствами, фазовыми переходами; интеллектуальные (активные, адаптивные) материалы и конструкции, естественные и биоконпозиты; диагностика, накопление повреждений, прочность, жесткость, долговечность и механика разрушения композитов; численные методы в механике гетерогенных сред и механике композитов, компьютерное моделирование поведения композитов; методы осреднения; термодинамика, физико-химическая механика и микромеханика композитных материалов; свойства волокна, матрицы, межфазного слоя; методы расчета композитных конструкций и конструкций летательных аппаратов; статические и динамические задачи, взаимодействие с окружающей средой; методы экспериментальных исследований композитов и композитных конструкций; механика высокоскоростного соударения. Статьи из нерусских источников также принимаются к опубликованию в журнале.

Журнал «Механика композиционных материалов и конструкций» зарегистрирован Комитетом Российской Федерации по печати, Свидетельство № 013809 от 14 июня 1995 года.

Публикация статей осуществляется бесплатно.

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) (<http://www.elibrary.ru>)

Журнал размещен в составе базы данных Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science ([http://elibrary.ru/rsci\\_press.asp](http://elibrary.ru/rsci_press.asp)).

Журнал включен в список ВАК по состоянию на 21.12.2021 г. (под номером 1451 с 26.03.2019 г.).

#### Редакционная коллегия:

Главный редактор

А.А.Мовчан – профессор, д.ф.-м.н. (Москва, Россия)

Заместитель главного редактора

А.Н.Власов – д.т.н. (Москва, Россия)

Члены редколлегии

Ayham Al-Shebel – Prof., Dr. (Damascus, Syria)

В.А. Бабешко – академик РАН, д.ф.-м.н. (Краснодар, Россия)

В.В. Васильев – академик РАН, д.т.н. (Москва, Россия)

В.А.Головешкин – профессор, д.т.н. (Москва, Россия)

А.Н. Данилин – профессор, д.ф.-м.н. (Москва, Россия)

Huang Jason – Prof., Dr. (Irvine, California USA)

И.В. Егоров – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Москва, Россия)

Mikhail Itskov – Prof., Dr. (Aachen, Germany)

М.Д. Коваленко – д.ф.-м.н. (Москва, Россия)

Jean-louis Lilien – Prof., Dr. (Liege, Belgium)

А.М. Липанов – академик РАН, д.т.н. (Москва, Россия)

С.А. Лурье – профессор, д.т.н. (Москва, Россия)

В.П. Матвеев – академик РАН, д.т.н. (Пермь, Россия)

Н.Ф. Морозов – академик РАН, д.ф.-м.н. (С.-Петербург, Россия)

Н.Н. Мягков – д.ф.-м.н. (Москва, Россия)

Ю.В. Немировский – д.ф.-м.н. (Новосибирск, Россия)

G.P.Panasenko – Prof., Dr. (Saint-Etienne, France)

В.Е. Панин – академик РАН, д.ф.-м.н. (Томск, Россия)

Ю.С. Соломонов – академик РАН, д.т.н. (Москва, Россия)

Э.И. Старовойтов – профессор, д.ф.-м.н. (Гомель, Беларусь)

Н.П. Тютюнников – д.т.н. (Москва, Россия)

Ф.Н. Шклярчук – профессор, д.т.н. (Москва, Россия)

Yalchin Efendiev – Prof., Dr. (Texas, USA)

Заведующая редакцией к.ф.-м.н. Ю.Н.Карнет (Москва)

**Адрес редакции:** 125040, Москва, Ленинградский проспект, д.7, стр.1; ИПРИМ РАН; тел. (495)946-18-06; [iam@iam.ras.ru](mailto:iam@iam.ras.ru)

Journal "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktarii" [Mechanics of composite materials and structures] is published under the auspices of the Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences from January 1995.

The journal is devoted to modern problems of composite mechanics and their applications in various structures and publishes the results of basic and applied research in the areas of: mechanics of structured, non-homogeneous and heterogeneous media with complex rheological properties, phase transitions; smart (active and adaptive) materials and structures, natural composites, and biocomposites; diagnostics, damage accumulation, strength, stiffness, durability and fracture mechanics of composites; numerical methods in mechanics of heterogeneous media and mechanics of composites, computer modeling of the behavior of composites; averaging methods; thermodynamics, physical and chemical mechanics and micromechanics of composite materials; properties of the fiber, matrix, interfacial layer; calculation methods of composite structures and aircraft structure; static and dynamic problems, interaction with the environment; methods of experimental research of composite materials and structures; mechanics of high-speed collision. Articles from non-Russian sources are also published in the journal.

Journal "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktarii" [Mechanics of composite materials and structures] was registered by Russian Federation Committee. Certificate N 013809 June 14, 1995.

Publishing articles is free of charge.

The journal is included in the Russian Science Citation Index (RISC) (<http://www.elibrary.ru>)

The journal is placed in the part of the database Russian Science Citation Index (RSCI) on the Web of Science platform ([http://elibrary.ru/rsci\\_press.asp](http://elibrary.ru/rsci_press.asp))

#### Editorial Board:

Chief Editor

A.A. Movchan – Prof., Dr. (Moscow, Russia)

Deputy Chief Editor

A.N. Vlasov – Prof., Dr. (Moscow, Russia)

Members of the Editorial Board

Ayham Al-Shebel – Prof., Dr. (Damascus, Syria)

V.A. Babeshko – Acad. of RAS, Dr. (Krasnodar, Russia)

V.V. Vasil'ev – Acad. of RAS, Dr. (Moscow, Russia)

V.A. Goloveshkin – Prof., Dr. (Moscow, Russia)

A.N. Danilin – Prof., Dr. (Moscow, Russia)

Huang Jason – Prof., Dr. (Irvine, California USA)

I.V. Egorov – Corr. member of RAS, Dr. (Moscow, Russia)

Mikhail Itskov – Prof., Dr. (Aachen, Germany)

M.D. Kovalenko – Dr. (Moscow, Russia)

Jean-louis Lilien – Prof., Dr. (Liege, Belgium)

A.M. Lipanov – Acad. of RAS, Dr. (Moscow, Russia)

S.A. Lurie – Prof., Dr. (Moscow, Russia)

V.P. Matveenko – Acad. of RAS, Dr. (Perm, Russia)

N.F. Morozov – Acad. of RAS, Dr. (St. Petersburg, Russia)

N.N. Myagkov – Dr. (Moscow, Russia)

Y.V. Nemirovskii – Dr. (Novosibirsk, Russia)

G.P.Panasenko – Prof., Dr. (Saint-Etienne, France)

V.E. Panin – Acad. of RAS, Dr. (Tomsk, Russia)

Yu.S. Solomonov – Acad. of RAS, Dr. (Moscow, Russia)

E.I. Starovoitov – Prof., Dr. (Gomel, Belarus)

N.P. Tyutyunnikov – Dr. (Moscow, Russia)

F.N. Shklyarchuk – Prof., Dr. (Moscow, Russia)

Yalchin Efendiev – Prof., Dr. (Texas, USA)

Managing Editor Yu.N.Karnet, Dr. (Moscow, Russia)

**Address:** 125040, Moscow, Leningradskiy prospekt, 7(1); IAM RAS; Phone: (495) 946-18-06; e-mail: [iam@iam.ras.ru](mailto:iam@iam.ras.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                           |         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>Уточненная модель термоупругопластического деформирования гибких армированных пластин</b>                                                                                              |         |
| Янковский А.П.....                                                                                                                                                                        | 293-312 |
| <b>Влияние скорости изменения температуры на напряженно-деформированное состояние и функциональные свойства композита с волокнами из сплава с памятью формы и вязко-упругим связующим</b> |         |
| Мовчан А.А., Чернов М.И.....                                                                                                                                                              | 313-338 |
| <b>Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузки</b>                                                                                                 |         |
| Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А.....                                                                                                                                      | 339-358 |
| <b>Численный анализ процесса дорнирования соединительной цилиндрической муфты из сплава с памятью формы с учетом влияния на поведение материала вида напряженного состояния</b>           |         |
| Шарунов. А.В.....                                                                                                                                                                         | 359-373 |
| <b>Оценка тензора предельной деформации поликристаллического сплава с памятью формы</b>                                                                                                   |         |
| Мишустин И.В.....                                                                                                                                                                         | 374-386 |
| <b>Определение демпфирующих свойств металлической ленты 3М на базе решения обратной задачи динамики трехслойного стержня и экспериментальных данных</b>                                   |         |
| Рабинский Л.Н., Бабайцев А.В., Шестеркин П.С.....                                                                                                                                         | 387-398 |
| <b>Обобщенные уравнения Рауса в теории ортотропных оболочек N-го порядка и их приложение к задачам о дисперсии нормальных волн</b>                                                        |         |
| Жаворонок С.И., Курбатов А.С.....                                                                                                                                                         | 399-431 |

УДК 539.4

EDN WQRAAQ (<https://elibrary.ru/wqraaq>)

## УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН\*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Сформулирована связанная начально-краевая задача неизоотермического упругопластического деформирования гибких армированных пластин при использовании уточненной теории изгиба. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Температура конструкций по толщине аппроксимируется полиномами высоких порядков. Решение поставленной нелинейной двумерной задачи строится на базе явной численной схемы. Исследовано термоупругопластическое деформирование плоско-перекрестно и пространственно армированных металлокомпозитных и стеклопластиковых пластин, динамически изгибаемых под действием воздушной взрывной волны. Показано: для адекватного расчета температуры в тонкостенных конструкциях ее нужно аппроксимировать полиномами 7-го порядка по толщине; для адекватного определения деформированного состояния компонентов композиции необходимо использовать уточненную теорию изгиба пластин, простейшим вариантом которой является теория Амбарцумяна. Для стеклопластиковых пластин приращение температуры при их динамическом изгибе составляет 3-18°C, а для металлокомпозитных пластин 30-35°C. Поэтому динамический упругопластический расчет стеклопластиковых конструкций при нагрузках взрывного типа можно проводить без учета тепловыделения в них. При аналогичных расчетах металлокомпозитных пластин можно не учитывать термочувствительность материалов композиции, но необходимо учитывать тепловое воздействие.

**Ключевые слова:** гибкие пластины; плоское многонаправленное армирование; пространственное многонаправленное армирование; динамический изгиб; уточненная теория изгиба; термоупругопластическое деформирование; явная численная схема

## REFINED MODEL OF THERMO-ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCED PLATES

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the  
Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

### ABSTRACT

A coupled initial-boundary value problem of non-isothermal elastoplastic deformation of flexible reinforced plates is formulated using the refined theory of bending. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The temperature of structures over the thickness is approximated by high-order polynomials. An explicit

\* Работа выполнена в рамках государственного задания (№ гос.регистрации 121030900260-6).

numerical scheme is used to solve the formulated nonlinear two-dimensional problem. Thermo-elastoplastic deformation of plane-cross and spatially reinforced metal-composite and fiberglass plates dynamically bent under the action of an air blast wave has been studied. It is shown that in order to adequately calculate the temperature in thin-walled structures, it must be approximated by polynomials of the 7th order in thickness; to adequately determine the strain of the composition components, it is necessary to use the refined theory of plate bending, the simplest version of which is the Ambartsumian theory. For fiberglass plates, the temperature increment during their dynamic bending is 3-18°C, and for metal-composite plates 30-35°C. Therefore, the dynamic elastic-plastic calculation of fiberglass structures under explosive loads can be carried out without taking into account the heat release in them. In similar calculations of metal-composite plates, the thermal sensitivity of the composition materials can be ignored, but the thermal effect must be taken into account.

**Keywords:** flexible plates; planar multidirectional reinforcement; spatial multidirectional reinforcement; dynamic bending; refined theory of bending; thermo-elastic-plastic deformation; explicit numerical scheme

## ВВЕДЕНИЕ

Конструкции из композиционных материалов (КМ) все более активно используются в инженерной практике [1-20]. Изделия из таких материалов часто подвергаются высокоинтенсивному термодинамическому нагружению [1,12-14,16,20], при котором материалы компонентов композиции могут деформироваться пластически [13,14,16,21-23], поэтому проблема моделирования неадиабатического упругопластического деформирования тонкостенных элементов КМ-конструкций является актуальной и на данный момент времени находится в стадии становления [8,15,22-26]. В работе [25] предложена структурная модель термомеханического поведения многонаправленно армированной среды, компоненты композиции которой деформируются упругопластически. Эта структурная модель была использована в [26] для расчета неадиабатического неупругого деформирования динамически изгибаемых КМ-пластин.

Для учета слабого сопротивления тонкостенных элементов КМ-конструкций поперечному сдвигу традиционно используют неклассические теории Рейсснера [1,10,13,16,27], Амбарцумяна [2,26] или Редди-Немировского [3,6,12], реже применяются более точные теории [10,11,13], использующие, как правило, гипотезу ломаной линии.

В работе [26] было показано, что для адекватного расчета температурного поля в динамически изгибаемой КМ-пластине температуру по ее толщине необходимо аппроксимировать полиномами 6-7 порядка. Для описания же механического поведения КМ-пластины в [26] использовалась одна из простейших неклассических теорий – теория Амбарцумяна [2].

Известно, что при кратковременном интенсивном нагружении конструкции основным источником тепловыделения является механическая диссипация энергии, зависящая от уровня напряжений и скоростей деформаций [28,29], которые в тонкостенных элементах конструкций могут быть аппроксимированы по толщине с разной степенью точности [1-3,6,10-13,16,27,30], поэтому в [26] остался открытым вопрос: достаточно ли использовать для расчета термоупругопластического динамического изгиба КМ-пластин теорию Амбарцумяна или следует применять более точные теории деформирования тонкостенных элементов КМ-конструкций [10,11,13,30].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена моделированию неизотермического динамического поведения упругопластически деформируемых армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба [30]. Численное решение связанной термомеханической нелинейной задачи строится с использованием явных методов шагов по времени [13,26,28,30].

## 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается гибкая КМ-пластина толщиной  $2h$  (рис.1) в декартовой прямоугольной системе координат  $x_i$  такой, что плоскость  $Ox_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) – срединная ( $|x_3| \leq h$ ). Конструкция армирована плоско-перекрестно или пространственно  $K$  семействами непрерывных волокон с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ). В поперечном направлении  $x_3$  структура армирования однородна. На рис.1а изображена ортогональная структура армирования в двух ( $K = 2$ ) направлениях [31,32], а на рис.1б – пространственная структура армирования в четырех ( $K = 4$ ) направлениях [32].

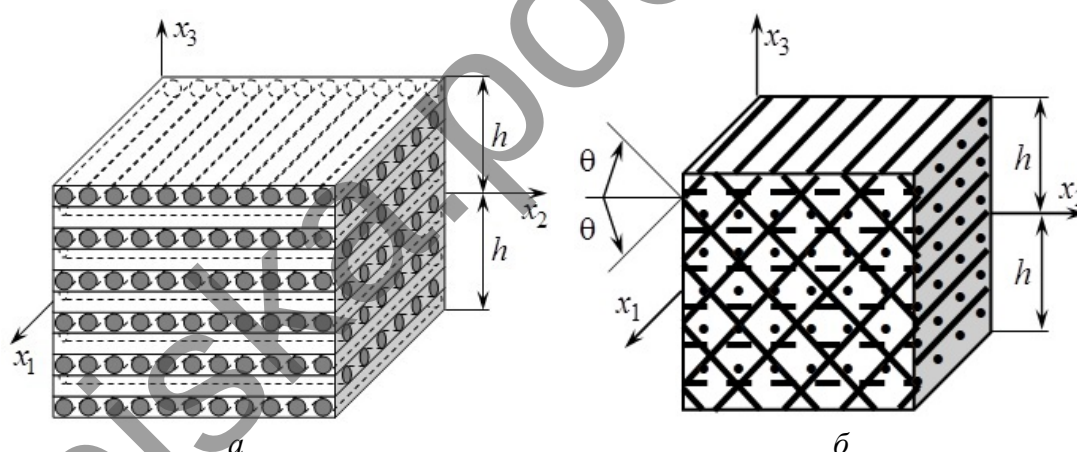


Рис.1. Элемент КМ-пластины: а) плоское ортогональное армирование; б) пространственное армирование в четырех направлениях.

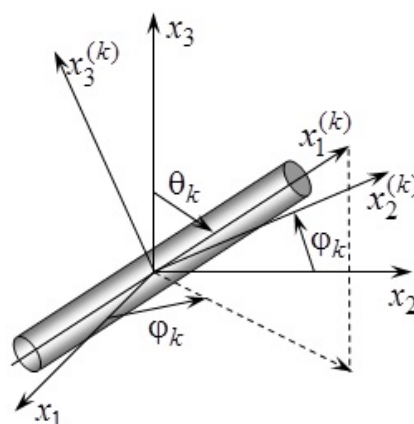


Рис.2. Локальная система координат, связанная с волокном  $k$ -го семейства.

С каждым  $k$ -м семейством волокон связана локальная прямоугольная система координат  $x_i^{(k)}$ . При этом ось  $x_1^{(k)}$  направлена вдоль траектории



армирования и задана углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис.2). Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq K$ ) определяются по формулам (41) из [25].

Предполагаем, что касательные внешние силы на лицевых плоскостях конструкции отсутствуют, а структура пространственного армирования удовлетворяет требованиям, изложенным в замечании в [26]. (В частности, для структуры, изображенной на рис.1б, эти условия выполняются.) Тогда согласно результатам работы [30], осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения точек пластины  $U_i$  в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируем соотношениями (при этом геометрическую нелинейность задачи учитываем в приближении Кармана)

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = \overline{1, 2};$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}),$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = \overline{1, 2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3),$$

где  $w$  – прогиб;  $u_i$  – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости ( $x_3 = 0$ ) в направлениях  $x_i$ ;  $t_0$  – начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по  $x_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ );  $\Omega$  – область, занимаемая конструкцией в плане. При  $M = 0$  из равенств (1), (2) получаем кинематические соотношения теорий Амбарцумяна [2,26] и Редди – Немировского [3,6,12]. Неизвестными в (1) и (2) являются функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = \overline{1, 2}, 0 \leq m \leq M$ ).

В настоящем исследовании рассматривается поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной механической системы, поэтому напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать по толщине конструкции так [1]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях, известные из силовых граничных условий.

К соотношениям (1)–(3) необходимо присоединить двумерные уравнения движения гибкой пластины (см. (10) и (11) в [30]) и определяющие уравнения, связывающие скорости усредненных напряжений в композиции  $\dot{\sigma}_{ij}$  со скоростями деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и температурой  $\Theta$ . Согласно результатам работы [25],

в фиксированный момент времени  $t$  эти соотношения можно записать в матричном виде

$$\dot{\sigma} = \mathbf{B}\dot{\varepsilon} + \mathbf{p}, \quad (4)$$

где

$$\dot{\sigma} \equiv (\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12})^T, \quad \dot{\varepsilon} \equiv (\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}, 2\dot{\varepsilon}_{12})^T; \quad (5)$$

$6 \times 6$ -матрица  $\mathbf{B}$  и шестикомпонентный вектор-столбец  $\mathbf{p}$  определяются матричными равенствами (38) в [25], их элементы зависят от структуры армирования (углов  $\theta_k$ ,  $\varphi_k$  и плотностей  $\omega_k$  армирования), характеристик материалов компонентов композиции и их текущего термомеханического состояния; точка – производная по  $t$ ; индекс  $T$  – операция транспонирования.

Согласно соотношениям (5), из третьего уравнения системы (4) можно выразить скорость линейной деформации в поперечном направлении

$$\dot{\varepsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\varepsilon}_{11} - b_{32}\dot{\varepsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\varepsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\varepsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\varepsilon}_{12}), \quad (6)$$

где  $b_{3i}$ ,  $p_3$  ( $i = \overline{1,6}$ ) – элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора-столбца  $\mathbf{p}$  в (4); производная  $\dot{\sigma}_{33}$  определяется путем дифференцирования по времени выражения (3). Скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в правой части равенства (6) получаются после дифференцирования по  $t$  соотношений (1), т.е. выражаются через двумерные функции  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}_i$  и  $\dot{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

Как и в [26], температура  $\Theta$  по толщине пластины аппроксимируется полиномом  $L$ -го порядка

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

где  $\Theta^0 = \text{const}$  – температура естественного состояния конструкции;  $\Theta_l$  ( $0 \leq l \leq L$ ) – искомые двумерные функции.

Чтобы замкнуть систему разрешающих уравнений неизоэотермического упругопластического деформирования КМ-пластины, к соотношениям (1)-(7) нужно добавить двумерные уравнения теплового баланса (см. (63) в [26]), необходимые механические (см. (22), (24) в [30]) и тепловые (см. (61) и (70) в [26]) граничные условия, а также начальные условия в момент времени  $t_0$  (см. (20), (25) в [30] и (72) в [26]).

Для интегрирования нелинейной рассматриваемой задачи используем явные пошаговые численные схемы, определяя решения в дискретные моменты времени  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). В связи с этим считаем, что при  $t = t_m$  уже известны значения следующих функций [26, 30]

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_l^{(p)m}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\ \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)n}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i^n(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\ \Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)n}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ l &= 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq p \leq M+1, \quad 0 \leq r \leq L-2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h,$$

где

$$u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \quad (9)$$

$$l = 1, 2, \quad 0 \leq p \leq M + 1, \quad 0 \leq r \leq L - 2;$$

$U$  – удельная внутренняя энергия КМ;  $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$  – напряжения и деформации в  $k$ -м компоненте композиции ( $k = 0$  – связующее,  $k \geq 1$  – волокна  $k$ -го семейства);  $\chi^{(k)}$  – параметр Одвишта в том же материале;  $q_i$  – компоненты теплового потока в КМ;  $q_\infty^{(\pm)}$  – заданные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (–) лицевые поверхности. Неизвестные функции  $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ) в (1) и (2) однозначно выражаются через кинематические переменные  $u_l^{(p)}$  (см. (9)) с помощью матричного соотношения (30) в [30].

Производные по времени в механической составляющей исследуемой связанной термоупругопластической задачи аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ , что позволяет разработать явную численную схему. Заменяя вторые производные по времени от кинематических переменных  $w$  и  $u_i^{(p)}$  в двумерных уравнениях движения гибкой КМ-пластины их конечно-разностными аналогами и учитывая (2), (3), (9) и обозначения, аналогичные (8), получим [30]

$$\begin{aligned} \frac{2hp}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n \right) - \\ &\quad - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n, \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[ \left( \sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left( 1 - (-1)^l \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{l+1} \left( \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left( 1 + (-1)^l \right) \right], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M + 1; \end{aligned} \quad (11)$$

$\rho_0, \rho_k$  – объемные плотности связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $\tau = \text{const} > 0$  – шаг по времени  $t$ . Массовые нагрузки в уравнениях (10) не учитываются. Усредненные напряжения в композиции  $\sigma_{ij}$  в соотношениях (11) выражаются через напряжения в компонентах композиции  $\sigma_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$ ) по структурным формулам, полученным в [25].

Используя (11) и предположения (8), в данный момент времени  $t_n$  можно вычислить все силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$  и внешние нагрузки  $\sigma_{33}^{(\pm)}$ , входящие в правые части равенств (10). Следовательно, при учете соответствующих граничных условий [30] из уравнений (10) можно вычислить по явной схеме значения неизвестных функций  $w$  и  $u_i^{(l)}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ .

Для интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой задачи также используем явную схему, но на двухточечном шаблоне по времени  $\{t_n, t_{n+1}\}$ . Тогда двумерные уравнения теплового баланса при учете (7), (9) и обозначений, аналогичных (8), примут вид [26]

$$\frac{\rho}{\tau} \left( U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} \left( l \lambda_{33}^{(-)} + h \alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} \left( \Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} \left( l \lambda_{33}^{(+)} + h \alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} \left( \Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (14)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} \left[ 1 - (-1)^{s+1} \right], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}),$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m \left[ q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad (15)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2),$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_{\infty}^{(\pm)};$$

$\lambda_{33}$  – коэффициент теплопроводности композиции в направлении  $x_3$  (вычисляется по структурным формулам из [33]);  $\alpha^{(\pm)}$  – коэффициент теплоотдачи со стороны верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостей;  $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$  – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей;  $c_l^{(k)}$  – коэффициент разложения удельной теплоемкости  $k$ -го компонента композиции  $c_k(\Theta - \Theta^0)$  по формуле (в случае учета термочувствительности)

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (16)$$

Равенства (13) – это тепловые граничные условия общего вида, заданные на лицевых плоскостях КМ-пластины и преобразованные с учетом разложения (7). Равенство (14) задает связь между двумерными величинами  $U^{(m)}$  (см. (9)) и коэффициентами разложения температуры (7) в предположении выполнения соотношений (16). Равенства (13) и (14) справедливы в любой момент времени.

На основании формул (15) при учете предположений (8) в текущий момент времени  $t_n$  можно вычислить правые части в (12), а затем по явной схеме при учете соответствующих граничных (заданных на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $\Omega$ ) и начальных условий [26] определяем значения функций  $U^{(m)}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . Далее, рассматривая при  $t = t_{n+1}$  уравнения (13) и (14) (в которых правые части уже известны) с учетом (15), определяем коэффициенты разложения температуры  $\Theta_l^{n+1}(\mathbf{x})$  ( $0 \leq l \leq L$ ) в формуле (7). В случае учета термочувствительности материалов композиции система (13) и (14) нелинейна. Для ее линеаризации можно использовать метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости. В остальном разработанная численная схема (10) и (12) при учете соотношений (1), (6), (11), (15) и структурных формул, полученных в [25,33], реализуется так, как описано в [26,30].

В работе [26] показано, что шаг по времени  $\tau$  в равенствах (10) и (12) необходимо выбирать, исходя из условия устойчивости Куранта [13].

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Как и в [26], исследуем термоупругопластическое динамическое поведение изгибаемых пластин толщиной  $2h = 2$  см. Область, занимаемая ими в плане,  $\Omega$ :  $|x_1| \leq a/2$ ,  $|x_2| \leq b/2$ ,  $a = 3b$ . Кромки конструкций жестко закреплены:  $w = 0$ ,  $u_i^{(m)} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ ,  $t \geq t_0$  (см. (9) и (10)). До начального момента времени  $t_0 = 0$  пластины покоятся ( $w = 0$ ,  $u_i^{(m)} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t = t_0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M + 1$ ) при температуре естественного состояния ( $\Theta = \Theta^0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $|x_3| \leq h$ ,  $t = t_0$ ). При  $t = t_0$  конструкции нагружаются снизу давлением  $p(t)$ , порожденным воздушной взрывной волной [34]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (18)$$

$t_{\max}$  – момент времени, когда  $p(t)$  достигает наибольшего значения  $p_{\max}$ ;

$t_{\min}$  – момент времени, при превышении которого можно пренебречь  $p(t)$  по сравнению с  $p_{\max}$  (так, формула (18) справедлива при  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ).

На основании экспериментальных данных [34] в расчетах примем  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс.

Через лицевые поверхности ( $x_3 = \pm h$ ) осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой ( $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ ) в условиях естественной конвекции ( $\alpha^{(\pm)} = 30 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  [35]) при температуре воздуха, равной температуре естественного состояния конструкций:  $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$  (см. (13)). На торцевых поверхностях пластин заданы температурные граничные условия, причем температура конструкций поддерживается равной температуре их естественного состояния  $\Theta^0$ .

Пластины изготовлены из магниевых сплавов ВТ65 [36] и армированы стальной проволокой марки У8А [31] (металлокомпозиция) или из эпоксисвязующего [37], усиленного стеклянными волокнами [31] (стеклопластик). Упругопластическое деформирование компонентов композиции при активном нагружении и постоянстве температуры  $\Theta$  описывается билинейной диаграммой

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – осевые напряжение и деформация;  $E^{(k)} = E^{(k)}(\Theta)$ ,  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$  – модули Юнга и линейного упрочнения материала  $k$ -го компонента композиции;  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$  – предел текучести того же компонента при фиксированной температуре ( $\Theta = \text{const}$ ). Физико-механические характеристики материалов композиций приведены в таблице, где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения, а в скобках указана температура ( $\Theta, ^\circ\text{C}$ ), при которой определено значение соответствующей характеристики. Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры  $\Theta$  в расчетах аппроксимировались линейно по данным, представленным в Таблице 1.

Таблица 1.

Физико-механические характеристики материалов композиций [31,36,37]

| Характеристика материала              | Эпоксидная смола           | Стеклянные волокна         | Магниевый сплав ВТ65 (Mg)   | Стальная проволока У8А      |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>            | 1210,0 (20)<br>1208,0 (40) | 2520,0 (20)<br>2519,6 (80) | 1800,0 (20)<br>1796,2 (100) | 7800,0 (20)<br>7791,8 (100) |
| $E$ , ГПа                             | 2,8 (20)<br>2,3 (40)       | 86,8 (20)<br>86,3 (80)     | 43,0 (20)<br>38,5 (100)     | 210,0 (20)<br>195,0 (100)   |
| $\nu$                                 | 0,33 (20)<br>0,333 (40)    | 0,25 (20)<br>0,254 (80)    | 0,330 (20)<br>0,334 (100)   | 0,3 (20)<br>0,305 (100)     |
| $\sigma_s$ , МПа                      | 20 (20)<br>18 (40)         | 4500 (20)<br>4400 (80)     | 267 (20)<br>219 (100)       | 3968 (20)<br>3971 (200)     |
| $E_s$ , ГПа                           | 1,114 (20)<br>0,783 (40)   | 6,230 (20)<br>5,168 (80)   | 0,379 (20)<br>0,367 (100)   | 6,973 (20)<br>5,014 (200)   |
| $\lambda$ , Вт/(м·К)                  | 0,243 (20)<br>0,240 (40)   | 0,89 (20)<br>0,86 (80)     | 117,23 (20)<br>121,42 (100) | 42,7 (20)<br>41,7 (100)     |
| $\alpha \cdot 10^6$ , К <sup>-1</sup> | 68,1 (20)<br>70,3 (40)     | 2,5 (20)<br>2,6 (80)       | 20,9 (20)<br>22,6 (100)     | 12,3 (20)<br>13,2 (100)     |

|                                            |                        |                          |                           |                           |
|--------------------------------------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $c, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ | 1,54 (20)<br>1,60 (40) | 0,800 (20)<br>0,839 (80) | 1,032 (20)<br>1,054 (100) | 0,485 (20)<br>0,488 (100) |
|--------------------------------------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|

Для проведения расчетов по пространственным переменным  $x_1$  и  $x_2$  вводилась равномерная сетка  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/100$ , а шаг по времени  $\tau$  выбирался равным 0,25 мкс. Рассматривались относительно тонкие ( $b = 1 \text{ м}$ ,  $2h/b = 1/50$ ) и относительно толстые ( $b = 20 \text{ см}$ ,  $2h/b = 1/10$ ) КМ-пластины, для которых при указанном способе дискретизации задачи необходимые условия устойчивости разработанной явной численной схемы заведомо выполняются (см. (80) в [26]).

Структуры армирования КМ-пластин однородны:  $\theta_k = \text{const}$ ,  $\varphi_k = \text{const}$ ,  $\omega_k = \text{const}$ ,  $1 \leq k \leq K$  (см. (11) и рис.2). Рассматриваются две схемы армирования: 1) плоское ортогональное армирование (рис.1а), когда два ( $K = 2$ ) семейства волокон уложены по направлениям  $x_1$  и  $x_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = 0,1$  и  $\omega_2 = 0,3$  соответственно; 2) пространственное армирование в четырех ( $K = 4$ ) направлениях (рис.1б), когда два первых семейства волокон уложены по-прежнему в направлениях  $x_1$  и  $x_2$ , а третье и четвертое – наклонно в плоскости  $x_2x_3$  по направлениям, которые задаются углами (см. рис.2):  $\theta_3 = \pi/4$ ,  $\theta_4 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (на рис.1б угол  $\theta = \pi/4$ ). Во второй структуре плотности армирования таковы:  $\omega_1 = 0,1$ ,  $\omega_2 = 0,2$ ,  $\omega_3 = \omega_4 = 0,05$ . В обеих схемах армирования общий расход волокон одинаков.

В работе [26] были проведены расчеты для рассматриваемых конструкций при задании в (1) и (2) значения  $M = 0$  (простейшая неклассическая аппроксимация кинематических переменных) и при варьировании значения  $L \geq 2$  в разложении температуры (7) и было показано, что для адекватного определения температурных полей в динамически изгибаемых КМ-пластинах в соотношении (7) необходимо задавать  $L = 6$  или  $L = 7$ .

Однако, как показано в [30], в случае изотермического динамического изгибного деформирования КМ-пластин для адекватного описания механического поведения таких тонкостенных элементов конструкций в соотношениях (1) и (2) следует принимать не  $M = 0$  (теория Амбарцумяна [2]), а  $M = 6$  или  $M = 7$  (т.е. нужно использовать уточненную теорию изгиба).

Как отмечалось во Введении, в настоящем исследовании изучается влияние уточненных соотношений (1) и (2) (при  $M = 7$ ) на расчетное термомеханическое поведение динамически изгибаемых КМ-пластин при упругопластическом деформировании их компонентов композиции.

На рис.3 изображены осцилляции максимальных значений температуры  $\Theta_m(t; M, L) = \max_r \Theta(t, \mathbf{r}; M, L)$  в зависимости от времени  $t$  в металлокомпозитных пластинах разной относительной толщины при 2D-структуре армирования (см. рис.1а). Кривые на рис.3а рассчитаны для относительно тонкой конструкции при  $p_{\max} = 10 \text{ МПа}$  (см. (17)), а на рис.3б – для относительно толстой КМ-пластины при  $p_{\max} = 50 \text{ МПа}$ . Кривые 1 и 2 на рис.3 рассчитаны по уточненной теории изгиба (при  $M = 7$  в (1), (2)) и при простейшей аппроксимации температуры по толщине (при  $L = 2$  в (7)) – кривые 1 – или при использовании

уточненного разложения (7) ( $L = 7$ ) – кривые 2. Сравнение поведения кривых 1 и 2 на рис.3, как и в случае использования теории изгиба Амбарцумяна [26], демонстрирует тот факт, что расчет зависимости  $\Theta_m(t; M, L)$  при простейшей квадратичной аппроксимации температуры ( $L = 2$ ) лишь качественно (причем на рис.3а очень приближенно), но не количественно, позволяет рассчитать осцилляции наибольших значений  $\Theta$  в рассматриваемых КМ-конструкциях.

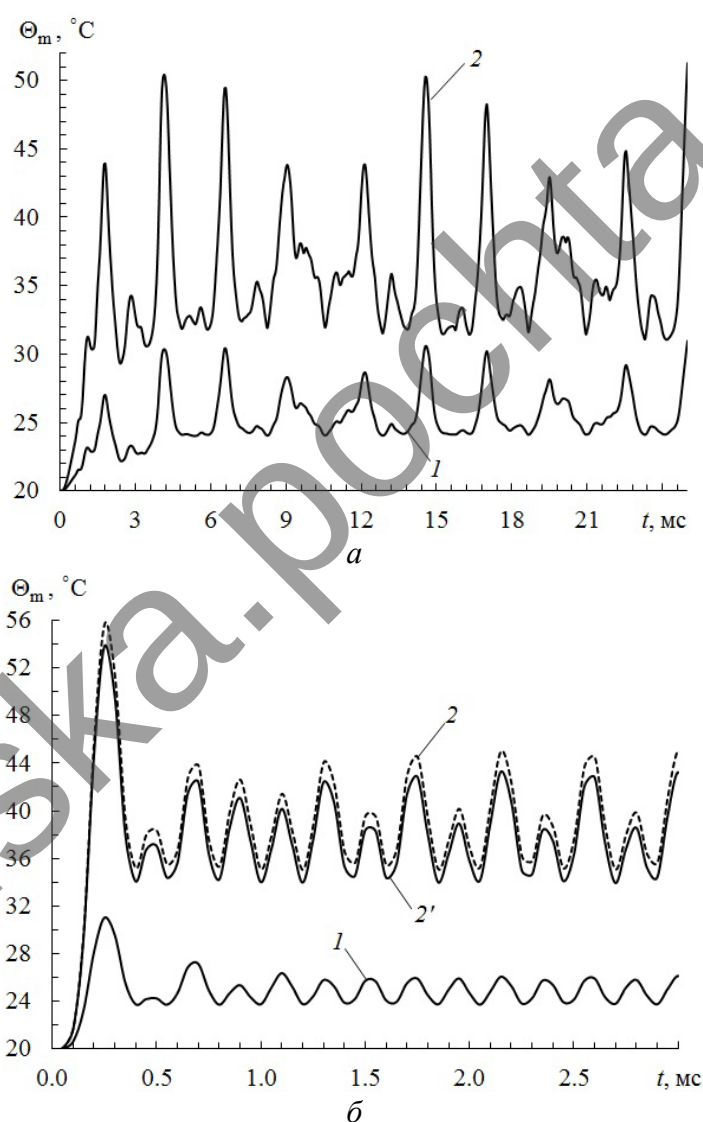


Рис.3. Зависимость от времени наибольшего значения температуры в относительно тонкой (а) и толстой (б) металлокомпозитных пластинах, рассчитанные с использованием разных аппроксимаций температурного поля и тангенциальных перемещений в поперечном направлении.

Кривая 2' на рис.3б приведена для сравнения и рассчитана по теории Амбарцумяна (при  $M = 0$  в (1) и (2)) при уточненной аппроксимации температуры (при  $L = 7$  в (7)). Сравнение кривых 2 и 2' на рис.3б показывает, что использование уточненной теории изгиба (при  $M = 7$ ) для относительно толстой металлокомпозитной пластины приводит к незначительному (примерно на  $3^\circ\text{C}$ ) увеличению расчетного максимального значения температуры в конструкции по



сравнению с расчетом по теории Амбарцумяна. В других рассматриваемых КМ-конструкциях это различие максимальных расчетных значений температур, определенных с использованием теории Амбарцумяна или уточненной теории изгиба, еще меньше. Так, для относительно тонких как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных пластин эта разность максимальных значений температур составляет менее 1°C, поэтому кривая 2' на рис.3а не изображена, так как визуально она практически не отличается от кривой 2. Для относительно толстых же стеклопластиковых конструкций эта разность температур составляет примерно 1,5°C. Однако для таких КМ-пластин приращение температуры в процессе осцилляций невелико: максимально достигаемое значение равно примерно 23°C, т.е. всего на 3°C больше температуры естественного состояния конструкции.

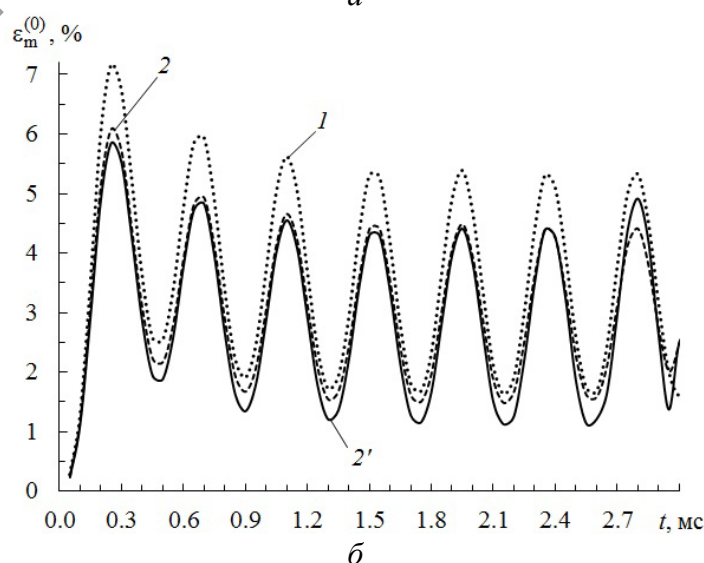
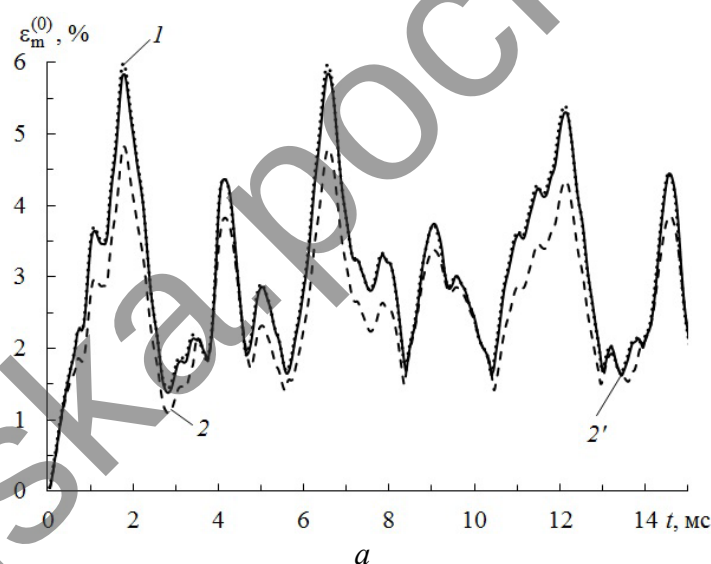
Несмотря на то, что при использовании уточненной теории изгиба КМ-пластин расчетное температурное поле незначительно отличается от случая использования теории Амбарцумяна, деформированные состояния компонентов композиции, рассчитанные по этим теориям, могут различаться достаточно сильно. На рис.4 изображены осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций связующего  $\varepsilon_*^{(0)}$  исследуемых композиций  $(\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_r \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r}), |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2, |x_3| \leq h)$ . Кривые на рис.4а,б рассчитаны для тех же КМ-конструкций, что и на рис.3а,б соответственно. Кривые 1 на рис.4а,б получены по уточненной теории изгиба без учета теплового воздействия (расчет проводился по теории из [30]); кривые 2 определены также по уточненной теории изгиба при уточненной аппроксимации температуры в (7) ( $L=7$ ): сплошные кривые 2' приведены для сравнения и рассчитаны по теории изгиба Амбарцумяна при использовании уточненной аппроксимации температуры ( $L=7$ ).

Сравнение максимальных значений ординат на кривых 1 и 2 на рис.4а,б показывает, что в случае относительно тонкой металлокомпозитной пластины (рис.4а) расчет, выполненный без учета теплового воздействия (кривая 1), приводит к завышению максимума интенсивности деформаций связующего на 27,3% по сравнению с термоупругопластическим расчетом (см. значения  $\varepsilon_m^{(0)}$  на кривых 1 и 2 рис.4а при  $t \approx 1,85$  мс), а в случае относительно толстой конструкции – на 17,6% (см. значения  $\varepsilon_m^{(0)}$  на кривых 1 и 2 рис.4б при  $t \approx 0,25$  мс). Следовательно, в случае металлокомпозитных пластин неучет теплового воздействия может приводить к существенному завышению (на десятки процентов) значений интенсивности деформаций связующего материала. Для армирующих волокон это различие не столь велико.

Сравнение кривых 2 и 2' на рис.4а показывает, что при использовании теории изгиба Амбарцумяна в относительно тонкой металлокомпозитной пластине максимальное расчетное значение интенсивности деформаций связующего оказывается на 20,8% больше, чем в аналогичном термоупругопластическом расчете, выполненном по уточненной теории изгиба (см. значения  $\varepsilon_m^{(0)}$  на кривых 2 и 2' рис.4а при  $t \approx 1,85$  мс). Аналогичное сравнение кривых 2 и 2' на рис.4б свидетельствует о том, что в случае относительно толстой металлокомпозитной пластины термоупругопластические расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, приводят к близким значениям максимумов на этих кривых. Так, ордината точки глобального

максимума на кривой 2' всего на 3,9% меньше, чем на кривой 2 (см. значения  $\varepsilon_m^{(0)}$  на кривых 2 и 2' рис.4б при  $t \approx 0,25$  мс). Следовательно, для относительно толстых металлокомпозитных пластин термоупругопластический расчет можно проводить с использованием теории изгиба Амбарцумяна при уточненной аппроксимации температуры.

На рис.4в изображены зависимости  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ , полученные для относительно толстой стеклопластиковой пластины при  $p_{\max} = 7$  МПа (см. (17)). Все кривые рассчитаны с учетом теплового воздействия при значении  $L = 7$  в разложении температуры (7). (Расчеты, выполненные без учета теплового воздействия, приводят к зависимостям  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ , которые визуально практически не отличаются от кривых на рис.4в, поэтому не изображены, чтобы его не загромождать.) Кривые 1 и 2 определены для конструкции с 2D-структурой армирования (см. рис.1а), а кривая 3 – для пластины с 4D-структурой (см. рис.1б). Кривые 1 и 3 рассчитаны по уточненной теории изгиба, а кривая 2 – по теории Амбарцумяна.



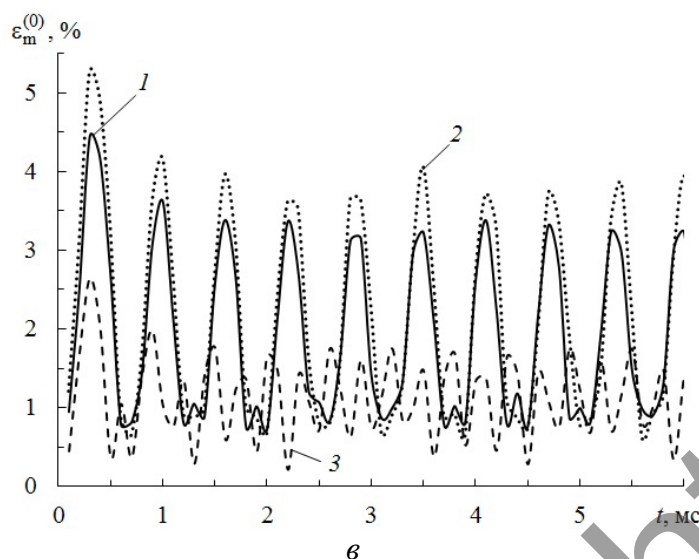


Рис.4. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего в относительно тонкой (а) и толстой (б) металлокомпозитных пластинах и в относительно толстой стеклопластиковой конструкции при 2D- и 4D-структурах армирования (в).

Сравнение кривых 1 и 2 на рис.4в показывает, что в случае относительно толстой стеклопластиковой пластины с плоско-перекрестной структурой армирования (в отличие от металлокомпозитной конструкции) использование теории Амбарцумяна приводит к завышению максимального значения  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$  на 18,2% по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории изгиба (см. значения  $\varepsilon_m^{(0)}$  на кривых 1 и 2 при  $t \approx 0,3$  мс). Сопоставление же кривых 1 и 3 свидетельствует о том, что замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру в относительно толстой стеклопластиковой пластине позволяет существенно (почти вдвое) уменьшить максимальное расчетное значение интенсивности деформаций связующего в термоупругопластическом случае. Дополнительные расчеты показали, что в случаях относительно тонких стеклопластиковых пластин (при  $p_{\max} = 4$  МПа) и металлокомпозитных конструкций разной относительной толщины замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис.1а) на пространственную структуру 4D-армирования (см. рис.1б) является неэффективной, так как приводит к увеличению наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиции.

## ВЫВОДЫ

Разработанная модель термоупругопластического деформирования гибких пластин с произвольными структурами армирования позволяет с разной степенью точности аппроксимировать температуру и тангенциальные перемещения точек таких конструкций по их толщине.

Подтверждены результаты работы [26]: для адекватного расчета температурных полей в КМ-пластинах при их динамическом упругопластическом изгибном деформировании температуру в поперечном направлении необходимо аппроксимировать полиномом 7-го порядка, а не полиномом 2-го порядка, как это традиционно принято делать для тонкостенных элементов конструкций. Расчет

температурных полей вполне обоснованно можно проводить с использованием простейшей неклассической теории изгиба пластин – теории Амбарцумяна [2]. При использовании же уточненной теории изгиба максимальные расчетные значения температуры изменяются незначительно по сравнению со случаем использования теории Амбарцумяна, а именно: увеличиваются всего на  $1,5^{\circ}\text{C}$  (и менее) для стеклопластиковых конструкций и на  $3^{\circ}\text{C}$  (и менее) для металлокомпозитных пластин.

Расчеты показали, что при динамическом нагружении КМ-пластин поперечной нагрузкой взрывного типа стеклопластиковые конструкции нагреваются не более, чем на  $3...18^{\circ}\text{C}$ , а металлокомпозитные – на  $30...35^{\circ}\text{C}$ . Поэтому для проведения адекватных динамических расчетов стеклопластиковых пластин, изгибно деформируемых нагрузкой, вызванной воздушной ударной волной, можно вполне обоснованно не учитывать влияние теплового воздействия, если отсутствуют дополнительные источники нагрева или охлаждения немеханического происхождения. Однако в металлокомпозитных конструкциях при таком нагружении учет теплового воздействия обязателен (хотя термочувствительность компонентов композиции при этом можно не принимать во внимание), иначе расчеты могут приводить к существенному искажению (на несколько десятков процентов) деформированного состояния компонентов композиции. Аналогично, термоупругопластический расчет, выполненный с использованием теории Амбарцумяна, также может приводить к существенному искажению (на десятки процентов) деформированного состояния компонентов композиции как в случае металлокомпозитных, так и в случае стеклопластиковых конструкций. Поэтому для проведения адекватных расчетов неизотермического упругопластического динамического поведения КМ-пластин следует рекомендовать использование уточненной теории изгиба (см. (1) и (2) при  $M = 7$ ) и уточненную аппроксимацию температуры по толщине таких конструкций (см. (7) при  $L = 7$ ).

Как и в изотермическом случае [30], замена плоской ортогональной структуры армирования (рис.1а) на пространственную структуру армирования (рис.1б) при сохранении общего расхода волокон в относительно толстой стеклопластиковой пластине при ее термоупругопластическом деформировании позволяет уменьшить интенсивность деформаций связующего почти вдвое. Аналогичная замена структур армирования в относительно тонких стеклопластиковых, а также в относительно тонких и относительно толстых металлокомпозитных конструкциях является неэффективной, так как приводит к существенному увеличению максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость, и колебания*. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
3. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания*. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.

4. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines* // Compos. Struct. – 2001. – Vol.53. – No.1. – Pp.21-42.
5. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective* // Composites. – 2001. – Part A32. – Pp.901-910.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2<sup>nd</sup> ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
7. Soutis C. *Fibre reinforced composites in aircraft construction* // Progress in Aerospace Sciences. – 2005. – Vol.41. – No.2. – Pp.143-151.
8. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009* // Composite Structures. – 2010. – Vol.93. – Pp.14-31.
9. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. *Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites* // Frontiers of Mechanical Eng. – 2013. – Vol.8. – No.2. – Pp.187-200.
10. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 412 p.
11. Куликов Г.М. *Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек* // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – №2. – С.33-42.
12. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
13. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
14. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review* // Int. J. Impact Eng. – 2014. – Vol.67. – Pp.27-38.
16. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
17. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics* / 4<sup>th</sup> ed. – Taylor & Francis Group, LLC, 2015. – 815 p.
18. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites* // SAMPE J. – 2001. – Vol.37. – No.3. – Pp.3-17.
19. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites* // Mechanics of Composite Materials. – 2009. – Vol.45. – No.2. – Pp.241-254.
20. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
21. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol.52. – Pp.1579-1587.
22. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites* // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – Pp.483-508.

23. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle* // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol.36. – Pp.86-112.
24. Ахундов В.М. *Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №3. – С.539-558.
25. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. I. Structural model of the reinforced medium* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – Vol.64. – No.1. – Pp.137-148.
26. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. II. Statement of the problem and method for solution* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – Vol.64. – No.2. – Pp.52-68.
27. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates* // Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol.12. – No.2. – Pp.69-77.
28. Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
29. Грешнов В.М. *Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов*. – М.: Физматлит, 2018. – 232 с.
30. Янковский А.П. *Построение уточненной модели упругопластического поведения гибких армированных пластин при динамическом нагружении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №2. – С.283-304.
31. Карпинос Д.М. *Композиционные материалы: Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
32. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
33. Янковский А.П. *Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон* // Прикладная физика. – 2011. – №3. – С.32-38.
34. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
35. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев С.Г., Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А. *Теплотехника: Учеб. для вузов / 4-е изд., испр.* – М.: Высш. шк., 2003. – 671 с.
36. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
37. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1* / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

## REFERENCES

1. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.

2. Ambarcumian S.A. *Teoria anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
3. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost' i kolebaniya* [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 p.
4. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines*. Compos. Struct., 2001, Vol.53, No.1, Pp.21-42.
5. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective*. Composites, 2001, Part A32, Pp.901-910.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2<sup>nd</sup> ed. Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
7. Soutis C. *Fibre reinforced composites in aircraft construction*. Progress in Aerospace Sciences. 2005, Vol.41, No.2, Pp.143-151.
8. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009*. Composite Structures, 2010, Vol.93, Pp.14-31.
9. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. *Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites*. Frontiers of Mechanical Eng., 2013, Vol.8, No.2, Pp.187-200.
10. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013, 412 p.
11. Kulikov G.M. *Termouprugost' gibkikh mnogoslojnykh anizotropnykh obolochek* [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.2, Pp.33-42.
12. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. Saarbrücken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
13. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktsij* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo NNGU, 2002, 400 p.
14. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review*. Int. J. Impact Eng., 2014, Vol.67, Pp.27-38.
16. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
17. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics* / 4<sup>th</sup> ed. Taylor & Francis Group, LLC, 2015, 815 p.
18. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites*. SAMPE J., 2001, Vol.37, No.3, Pp.3-17.

19. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites*. Mechanics of Composite Materials, 2009, Vol.45, No.2, Pp.241-254.
20. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksij pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]*. Moskva, Fizmatlit, 2019, 448 p.
21. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders*. International Journal of Mechanical Sciences, 2010, Vol.52, Pp.1579-1587.
22. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, Pp.483-508.
23. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle*. International Journal of Plasticity, 2012, Vol.36, Pp.86-112.
24. Akhundov V.M. *Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations*. Mechanics of composite materials, 2015, Vol.51, No.3, Pp.539-558.
25. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. I. Structural model of the reinforced medium*. Mathematical methods and physicomechanical fields, 2021, Vol.64, No.1, Pp.137-148.
26. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. II. Statement of the problem and method for solution*. Mathematical methods and physicomechanical fields, 2021, Vol.64, No.2, Pp.52-68.
27. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol.12, No.2, Pp.69-77.
28. Pobedrya B.E. *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1981, 344 p.
29. Greshnov V.M. *Fiziko-matematicheskaya teoriya bol'shikh neobratimyykh deformatsij metallov [Physical and mathematical theory of large irreversible deformations of metals]*. Moskva, Fizmatlit, 2018, 232 p.
30. Yankovskii A.P. *Postroenie utochnennoj modeli uprugoplasticheskogo povedeniya gibkikh armirovannykh plastin pri dinamicheskom nagruzhении [Construction of refined model of elastic-plastic behavior of flexible reinforced plates under dynamic loading]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.2, Pp.283-304.
31. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
32. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
33. Yankovskii A.P. *Modelirovanie protsessov teploprovodnosti v prostranstvenno-armirovannykh kompozitakh s proizvol'noj orientatsiej volokon [Modelling of processes of thermal conductivity in spatially reinforced composites with any orientation of fibres]*. Prikladnaya fizika, 2011, No.3, Pp.32-38.
34. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.



35. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. *Teplotekhnika: Uchebnik dlya vuzov [Heat engineering: Textbook for universities]*, 4th ed., rev. Moskva, Vysshaya shkola, 2003, 671 p.
36. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustojchivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1965, 567 p.
37. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.

Поступила в редакцию 14 июня 2022 года.

---

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru), [yankovsky\\_ap@rambler.ru](mailto:yankovsky_ap@rambler.ru)



УДК 539.4

EDN XLXXMJ (<https://elibrary.ru/xlxxmj>)

## ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТА С ВОЛОКНАМИ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ И ВЯЗКО-УПРУГИМ СВЯЗУЮЩИМ\*

Мовчан А.А.<sup>1</sup>, Чернов М.И.<sup>2</sup><sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

Деформационные свойства композитов (КМ) с волокнами из сплава с памятью формы (СПФ) и линейно упругим связующим существенно ограничены малыми деформациями связующего. Одним из способов преодоления этого недостатка является использование вязкоупругих связующих с ограниченной ползучестью и обратимыми с течением времени после разгрузки деформациями, величина которых сравнима с возвращаемыми при обратном фазовом превращении деформациями СПФ. Композиты с элементами из сплавов с памятью формы и вязкоупругим связующим демонстрируют реономное (т.е. зависящее от масштаба времени) поведение. Поэтому анализ влияния скорости изменения температуры волокон на функциональные свойства таких КМ является актуальной задачей. В статье описаны результаты решения этой задачи для однонаправленного КМ в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях и модели стандартного линейного тела для вязкоупругого связующего. Особое внимание уделено исследованию влияния скорости изменения температуры и вязкоупругих свойств связующего на возможность осуществления в КМ замкнутого двойного эффекта памяти формы. Установлено, что при стремлении скорости изменения температуры волокон из СПФ к бесконечности поведение КМ с вязкоупругим связующим стремится к поведению такого же композита, но с упругим связующим в случае, если мгновенный модуль вязкоупругого связующего равен модулю Юнга упругого связующего. В то же время, при стремлении скорости изменения температуры к нулю поведение КМ с вязкоупругим связующим стремится к поведению КМ с упругим связующим, модуль Юнга которого равен длительному модулю вязкоупругого связующего. Предложен способ определения коэффициента наполнения, обеспечивающего осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы в КМ с вязкоупругим связующим по решению задачи для случая упругого связующего.

**Ключевые слова:** композит; вязкоупругое связующее; волокна из сплава с памятью формы; замкнутый двойной эффект памяти формы

\* Работа выполнена в рамках государственного задания ИППРИМ РАН (номер гос.регистрации 121112200126-5) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00240).

# THE EFFECT OF THE RATE OF TEMPERATURE CHANGE ON THE STRESS – STRAIN STATE AND FUNCTIONAL PROPERTIES OF A COMPOSITE WITH FIBERS FROM A SHAPE MEMORY ALLOY AND A VISCOELASTIC BINDER

Movchan A.A.<sup>1</sup>, Chernov M.I.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow State University, Moscow, Russia*

## ABSTRACT

The deformation properties of composites (CM) with shape memory alloy (SMA) fibers and a linearly elastic binder are significantly limited by small deformations of the binder. One of the ways to overcome this disadvantage is the use of viscoelastic binders with limited creep and deformations reversible after unloading over time, the magnitude of which is comparable to the deformations of SMA returned during the reverse phase transformation. CM with shape memory alloy elements and viscoelastic binder exhibit rheonomic (i.e. time-scale-dependent) behavior. Therefore, the analysis of the influence of the rate of temperature change of fibers on the functional properties of such CM is an urgent task. The article describes the results of solving such a problem for unidirectional CM in the framework of the model of nonlinear deformation of SMA during phase and structural transformations and the model of a standard linear body for a viscoelastic binder. Special attention is paid to the study of the influence of the rate of temperature change and the viscoelastic properties of the binder on the possibility of implementing a closed two way shape memory effect in CM. It is established that when the rate of temperature change of SMA fibers tends to infinity, the behavior of CM with a viscoelastic binder tends to the behavior of the same composite, but with an elastic binder if the instantaneous modulus of the viscoelastic binder is equal to the Young's module of the elastic binder. At the same time, when the rate of temperature change tends to zero, the behavior of KM with a viscoelastic binder tends to the behavior of KM with an elastic binder, the Young's modulus of which is equal to the long-term modulus of the viscoelastic binder. A method is proposed for determining the filling coefficient that ensures the implementation of a closed two way shape memory effect in KM with a viscoelastic binder by solving the problem for the case of an elastic binder.

**Keywords:** composite; viscoelastic binder; shape memory alloy fibers; closed two way shape memory effect

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из разновидностей актуаторов (силовозбудителей, приводов) многоразового действия с активными элементами, выполненными из сплавов с памятью формы (СПФ) [1] являются композиты с элементами (частицами, волокнами, слоями) из СПФ. Общие проблемы создания и функционирования композитов с элементами из СПФ рассматривались в [2-4]. Проблемы, связанные с теоретическим моделированием поведения таких композитов, рассматривались в [5]. Результаты численного анализа и экспериментальных исследований поведения таких композитов изложены в [6]. Поведение композитных стержней, содержащих элементы из СПФ, рассматривали в [7,8]. Работающие на изгиб композитные структуры с элементами из СПФ рассматривались в [9-12]. Поведение композитных пластин с элементами из СПФ рассматривали в [13,14]. Двумерные композитные системы с элементами из СПФ рассмотрены

в [15], композиты с несимметричным армированием элементами из СПФ – в [16], гибридные композиты с элементами из СПФ – в [17]. Поведение композитов с пластичной металлической матрицей и волокнами из СПФ рассматривалось в [18], микромеханическая модель поведения композита с вязкой матрицей и наполнителем из СПФ предложена в [19].

Поведение композитов с волокнами из никелида титана, в которых происходят частичные фазовые переходы описано в [20]. Проблемы анализа устойчивости и послекритического поведения композитных стержней с элементами из СПФ теоретически исследовались в [7,8]. Послекритическое и аэроупругое поведение композитных пластин, армированных СПФ, рассматривалось в [14].

Важной особенностью актуаторов (силовозбудителей, приводов) многоразового действия, содержащих рабочие тела из СПФ и упругие тела смещения, является возможность осуществления в таких системах замкнутого двойного эффекта памяти формы [21-23]. Суть этого эффекта сводится к тому, что на этапе охлаждения рабочего тела из СПФ за счет накопления деформаций прямого термоупругого мартенситного превращения может генерироваться деформация, в точности равная заранее заданной рабочему телу и снимаемой на этапе его нагрева деформации. В композитах с элементами из СПФ осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы также возможно при определенном сочетании свойств СПФ, составляющего волокна и материала связующего, а также заданной элементам из СПФ начальной деформации.

В [24] проведен теоретический анализ трехслойной пластины с внешними тонкими активными слоями из СПФ и внутренним упругим слоем. Рассмотрено также поведение однонаправленного композита с волокнами из СПФ и связующим, поведение которого предполагалось упругим. Поведение СПФ описывалось простейшей моделью линейного деформирования этого материала при фазовых превращениях [25], не учитывающей вообще возможность структурного механизма деформирования СПФ. В рамках такой простейшей постановки удалось получить в аналитическом виде условия осуществления в рассмотренном композите замкнутого двойного эффекта памяти формы. В [26] задача об однонаправленном композите с волокнами из СПФ решалась в рамках более совершенной модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях [27]. Поведение связующего по-прежнему предполагалось линейно упругим. Предложен численный метод определения условий осуществления в таком композите замкнутого двойного эффекта памяти формы.

Предположение о линейно упругом поведении связующего накладывает серьезные ограничения на деформационные возможности рассматриваемого композита многократного действия. Дело в том, что волокна из никелида титана после надлежащей термомеханической обработки могут испытывать возвращаемые при нагреве и соответствующем обратном термоупругом мартенситном превращении деформации порядка 8%. Матрица однонаправленного композита должна испытывать такие же по порядку величины, возвращаемые при разгрузке деформации. Металлическая матрица не может испытывать линейно связанные с напряжениями возвращаемые при разгрузке деформации такой величины. Для эластомеров характерны нелинейные эффекты (например, эффект Маллинза). В полимерных связующих возвращаемые деформации такой величины допустимы, однако для полимеров характерно не упругое, а вязкоупругое поведение.

Первые результаты по учету влияния вязкоупругих свойств связующего на поведение композита с волокнами из СПФ получены в [28], где соответствующие задачи решались, как в несвязанной, так и в весьма сложной связанной постановках. Здесь под связанной постановкой понимается такая, в рамках которой учитывается влияние действующих в волокнах напряжений и накопленных в них фазово-структурных деформаций на характерные температуры термоупругих мартенситных фазовых переходов. Было установлено, что результаты решения задач в форме графиков зависимости искомых величин (деформации композита, напряжения в волокнах и матрице) от температуры в процессах нагрева и последующего охлаждения волокон мало различаются при решении задачи в связанной или несвязанной постановках. При решении задач в связанной постановке возникали определенные математические сложности (неустойчивость решения). Пусть для композита с упругим связующим параметры (коэффициент наполнения, заданная начальная деформация и параметры материала СПФ и связующего) подобраны так, чтобы осуществлялся замкнутый двойной эффект памяти формы. Согласно данным, полученным в [28], при переходе в этом композите к вязкоупругому связующему замкнутый двойной эффект памяти формы не осуществляется. Точнее добиться осуществления этого эффекта удастся лишь при стремлении скорости изменения температуры к бесконечности. Следует отметить, что осуществить быстрый нагрев волокон композита, выполненных из СПФ типа никелида титана, достаточно просто, например, пропуская по волокнам ток достаточной интенсивности. В то же время, быстрое охлаждение волокон, находящихся внутри связующего, является достаточно сложной задачей. Подобрать параметры композита с вязкоупругим связующим так, чтобы осуществлялся замкнутый двойной эффект памяти формы для средних и малых скоростей охлаждения волокон из никелида титана в [28] не удалось.

В данной работе в несвязанной постановке исследованы зависимости напряжений, возникающих в волокнах композита и деформаций этих волокон от скорости изменения их температуры. Проведено систематическое исследование условий, обеспечивающих выполнение замкнутого двойного эффекта памяти формы в однонаправленном композите с волокнами из СПФ и вязкоупругим связующим. Предложен алгоритм, позволяющий определить значения параметров композита и его компонент, обеспечивающие осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы в случае медленного охлаждения волокон в композите по результатам решения задач в предположении линейно-упругого поведения связующего.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется поведение однонаправленного композита с вязкоупругим связующим, армированного волокнами из СПФ типа никелида титана [28]. Перед совмещением со связующем волокнам из СПФ задается начальная фазово-структурная деформация растяжения  $\varepsilon_0$ . Считается, что процесс совмещения не приводит к возникновению в волокнах или связующем механических напряжений. Последующий нагрев волокон через интервал температур обратного термоупругого мартенситного превращения приводит за счет явления памяти формы к уменьшению их длины, продольному сжатию всего композита и возникновению растягивающих напряжений в волокнах и сжимающем

напряжении в связующем. Охлаждение волокон через интервал температур прямого термоупругого мартенситного превращения, следующее за их нагревом, приводит к накоплению в них деформации прямого превращения и уменьшению модуля напряжений, действующих в волокнах и в связующем.

Основная проблема данной работы состоит в формулировке алгоритма подбора параметров системы, в частности коэффициента наполнения  $\mu$  и деформации  $\varepsilon_0$ , с тем, чтобы при полном прямом превращении на этапе охлаждения волокон в них накапливалась деформация прямого превращения, в точности равная начальной деформации  $\varepsilon_0$ . В случае упругого поведения связующего в точке окончания прямого превращения напряжение в системе также будет равно нулю, т.е. полный цикл нагрева и охлаждения приведет к возвращению системы в начальное ненапряженное состояние. Неоднократное повторение таких температурных циклов в условиях стабильного поведения СПФ приводит к повторению процессов изменения напряженно-деформированного состояния, наблюдавшихся в первом цикле нагрева и охлаждения. Этот эффект квалифицируется как явление многократно обратимой памяти формы (в англоязычной научной литературе используется название «two way shape memory effect» [29,30]).

Исследование этого эффекта в случае вязкоупругого связующего осложняется тем обстоятельством, что в момент достижения деформацией связующего нулевого значения в точке окончания процесса прямого превращения, напряжение в вязкоупругом связующем может быть отлично от нуля. Напряжение в связующем будет приближаться к нулю при выдержке после завершения процесса прямого превращения в волокнах, наличие которой предполагается.

Для описания поведения вязкоупругого связующего в данной работе, также, как и в [28], используется простейшая модель стандартного линейного тела [31,32] с единственным значением времени релаксации

$$E_m \left( \dot{\varepsilon}_m + k \varepsilon_m \right) = \dot{\sigma}_m + (k + A) \sigma_m. \quad (1.1)$$

Здесь  $E_m$ ,  $\sigma_m$ ,  $\varepsilon_m$  – мгновенный модуль, продольные напряжение и полная деформация связующего;  $k$  и  $A$  – параметры вязкоупругой модели, через которые длительный модуль  $E_\infty$  выражается по формуле

$$\frac{E_\infty}{E_m} = \frac{k}{k + A}. \quad (1.2)$$

Для описания поведения волокон из СПФ используется модель нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях [27]. Одномерный вариант определяющих соотношений этой модели, ориентированный на решение несвязанных задач о деформировании элементов из СПФ, сводится к уравнениям

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{phst}, \quad (1.3)$$

$$d\varepsilon^{phst} = \rho_{D1} \frac{C\varphi_1(|\sigma|) + \varepsilon^{phst}}{C + q} dq + \rho_{D2} q_{st} \varphi'_2(\sigma) d\sigma, \quad (1.4)$$

$$d\varepsilon^{phst} = \frac{\varepsilon^{phst}}{q} dq + \rho_{D2} q_{st} \varphi'_2(\sigma) d\sigma, \quad (1.5)$$

$$q = 0.5 \left( 1 - \cos \left( \pi \frac{M_s - T}{M_s - M_f} \right) \right), \quad q = 0.5 \left( 1 - \cos \left( \pi \frac{A_f - T}{A_f - A_s} \right) \right), \quad (1.6)$$

$$\varepsilon^e = \left( \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A} \right) \sigma. \quad (1.7)$$

В (1.3)-(1.7)  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^{phst}$  – полная, упругая и фазово-структурная деформация, температурной компонентой деформации в силу ее малости пренебрегается,  $\sigma$  – напряжения,  $q$  – объемная доля мартенситной фазы,  $q_{st} = q$ , если происходит структурное превращение,  $q_{st} = 0$ , если структурное превращение не имеет места. Условия осуществления структурного перехода и соответствующего процесса деформирования сформулированы в работах [33-34]. Соотношение (1.4) соответствует прямому, а соотношение (1.5) – обратному фазовому превращению. Первое и второе соотношения (1.6) определяют изменение объемной доли мартенситной фазы  $q$  для прямого и для обратного фазового превращения соответственно. Здесь  $T$ ,  $M_s$ ,  $M_f$ ,  $A_s$ ,  $A_f$  – температура волокон и характерные температуры термоупругих мартенситных превращений в СПФ, из которых выполнены волокна композита, символ  $M$  обозначает прямое, а символ  $A$  – обратное превращение, нижний индекс  $s$  соответствует началу, а нижний индекс  $f$  – окончанию соответствующего фазового перехода. Соотношение (1.7) определяет упругую составляющую деформации СПФ с учетом переменности значений модуля Юнга при фазовом переходе, причем  $E_M$ ,  $E_A$  – значения модуля Юнга СПФ в мартенситном и аустенитном состоянии. Анализ проводится для следующих значений постоянных материала и материальных функций СПФ, характерных для никелида титана [35]

$$\begin{aligned} M_s^0 &= 40^\circ \text{C}, \quad M_f^0 = 20^\circ \text{C}, \quad A_s^0 = 50^\circ \text{C}, \quad A_f^0 = 70^\circ \text{C}, \quad E_A = 84000 \text{ МПа}, \\ E_M &= 28000 \text{ МПа}, \quad \rho_{D1} = \rho_{D2} = 0.08, \quad C = 2, \quad \sigma_{10} = 140 \text{ МПа}, \\ \sigma_{20} &= 200 \text{ МПа}, \quad a = 2, \quad \varphi_1(|\sigma|) = \Phi_1(|\sigma|/\sigma_{10}), \quad \varphi_2(|\sigma|) = \Phi_2(|\sigma|/\sigma_{20}), \\ \Phi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt, \quad \Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^a). \end{aligned}$$

Помимо определяющих соотношений для связующего (1.1) и волокон (1.3)-(1.7) в разрешающую систему уравнений задачи должны входить уравнения равновесия и соотношения совместного деформирования волокон и связующего. Для описания поведения композита в продольном направлении используется гипотеза осреднения по Фойгхту. Уравнение равновесия при условии отсутствия внешней нагрузки имеют вид

$$\mu \sigma_f + (1 - \mu) \sigma_m = 0, \quad (1.8)$$

а условие совместного деформирования волокон и связующего сводится к

$$\frac{\sigma_f}{E_f} + \varepsilon_1^{phst} = \varepsilon_m. \quad (1.9)$$

Здесь  $\sigma_f$  – напряжение в волокнах,  $\varepsilon_1^{phst}$  – фазово-структурная деформация, волокон, отсчитываемая от состояния с начальной деформацией:  $\varepsilon_1^{phst} = \varepsilon^{phst} - \varepsilon_0$ .

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕСВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ

Заменяя в соотношениях (1.4), (1.5) знаки дифференциалов на знаки производных по времени, исключая из соотношений (1.1), (1.3)-(1.5) величины  $\sigma_m$ ,  $\varepsilon_m$ ,  $q$  с помощью (1.6), (1.8), (1.9) можно получить следующая система двух, а не трех, как в случае связанной задачи [28], нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени – напряжения в волокнах  $\sigma_f$  и фазово-структурной составляющей деформации волокон  $\varepsilon^{phst}$

$$\dot{\sigma}_f = \frac{N^\pm}{H} \dot{T} - R, \quad (2.1)$$

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = \frac{N^\pm B - HD^\pm}{H} \dot{T} - BR. \quad (2.2)$$

В системе (2.1), (2.2) введены следующие обозначения

$$q = 0.5(1 - \cos(\pi\delta^\pm)), \quad \delta^+ = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad \delta^- = \frac{A_f^0 - T}{A_f^0 - A_s^0},$$

$$\dot{q} = F^\pm \dot{T}, \quad F^+(q) = -\frac{\pi}{2(M_s^0 - M_f^0)} \sin(\pi\delta^+), \quad F^- = -\frac{\pi}{2(A_f^0 - A_s^0)} \sin(\pi\delta^-),$$

$$R = \frac{\left[ \frac{\mu(k+A)}{1-\mu} + \frac{E_m k}{E(q)} \right] \sigma_f + E_m k \varepsilon_1^{phst}}{H}, \quad H = \frac{\mu}{1-\mu} + E_m \left( \frac{1}{E(q)} + B \right),$$

$$N^\pm = E_m G F^\pm, \quad B = \rho_{D2} q_{st} \Phi'_2(\sigma_f), \quad D^\pm = F^\pm \omega^\pm, \quad G = \left( \sigma_f \frac{\Delta E}{E_A E_M} + \omega^\pm \right),$$

$$\omega^+ = \rho_{D1} (1 - qf(q)) \varphi_1(|\sigma_f|) + f(q) \varepsilon^{phst'}, \quad \omega^- = \varepsilon^{phst'} / q.$$

В приведенных выше соотношениях верхний индекс минус соответствует процессам нагрева волокон из СПФ через интервал температур обратного термоупругого мартенситного превращения, верхний индекс плюс – процессам последующего охлаждения волокон через интервал температур прямого термоупругого мартенситного превращения; точка сверху обозначает производную по времени. В данной работе рассматриваются процессы изменения температуры волокон из СПФ с постоянной скоростью  $\dot{T} = \theta$ , измеряемой в °С/мин.

## 3. ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЛОКОН ИЗ СПФ

Данный раздел посвящен исследованию влияния скорости изменения температуры волокон из СПФ, одинаковой для охлаждения и нагрева на напряжения и фазово-структурные деформации этих волокон. Мгновенный модуль связующего во всех описанных ниже расчетах принят равным



$$E_m = 2500 \text{ МПа} \quad (3.1)$$

(Дефлон, [36]), а начальная деформация волокон считается равной  $\varepsilon_0 = 0.04$ . В соответствии с работами [33-34] значение напряжения  $\sigma_s$ , начиная с которого в волокнах из СПФ, обладающих начальной фазово-структурной деформацией  $\varepsilon_0$  происходит структурный переход, определяется по формуле

$$\sigma_s = \sigma_{20} \left[ \ln \left( \frac{\rho_D}{\rho_D - \varepsilon_0} \right) \right]^{1/\alpha} = 164 \text{ МПа.}$$

В данном разделе анализ проводится для фиксированных значений вязкоупругих постоянных связующего

$$A = 1.68 \text{ мин}^{-1}, \quad k = 0.32 \text{ мин}^{-1} \quad (3.2)$$

определенных по кривой релаксации напряжений в [37] и соответствующих весьма низкому значению длительного модуля (1.2):  $E_\infty/E_m = 0.16$ . Значение коэффициента наполнения в данном разделе принимается равным  $\mu = 0.251$ , что обеспечивает для  $\varepsilon_0 = 0.04$  осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы в композите с упругим связующим [26].

Установлено, что при уменьшении скорости нагрева на 3 порядка графики зависимости фазово-структурной деформации волокон от температуры меняются мало, причем только в той части процесса, в которой, наряду с фазовым переходом в волокнах из СПФ происходит еще и структурный. В то же время для процесса охлаждения графики зависимость фазово-структурной деформации при изменении скорости уменьшения температуры меняются весьма существенно, см. рис.1а. Линия 1 соответствует упругому решению, линия 2 – скорости изменения температуры  $\theta = 100$ , линия 3 –  $\theta = 50$ , линия 4 –  $\theta = 25$ , линия 5 –  $\theta = 10$ , линия 6 –  $\theta = 5$ , линия 7 –  $\theta = 1$ , линия 8 –  $\theta = 0.1$ .

Согласно рис.1а при уменьшении  $\theta$  от  $\infty$  до  $\theta = 5$  деформация, накопленная при полном прямом превращении, уменьшается. При меньших скоростях изменения температуры наблюдается обратная тенденция – с уменьшением  $\theta < 5$  возвращаемая деформация возрастает!

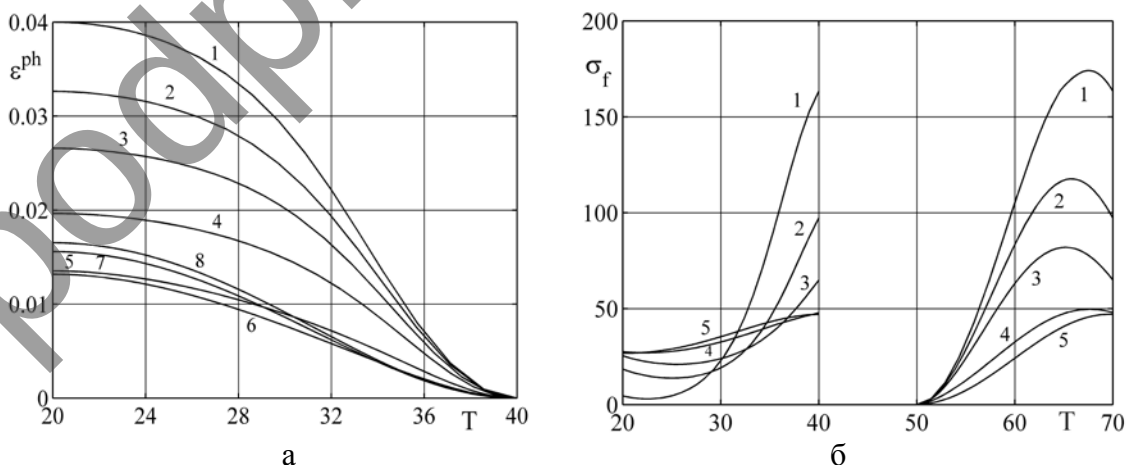


Рис.1.

Деформация, накапливаемая в СПФ при прямом превращении, происходящем под действием напряжения, монотонно возрастает с ростом этого

напряжения, поэтому понять причину немонотонной зависимости накапливаемой при прямом превращении в волокнах деформации от  $\theta$  можно, рассмотрев зависимость напряжений, действующих в волокнах от температуры в процессе нагрева и охлаждения этих волокон. На рис.1б для тех же значений параметров материала, того же значения коэффициента заполнения и интервала значений скорости изменения температуры  $\theta$ , в котором деформация полного прямого превращения немонотонно зависит от  $\theta$ , приведены графики зависимости напряжений в волокнах  $\sigma_f$  от температуры для нагрева (правые кривые) и последующего охлаждения (левые кривые) волокон. Линии 1 соответствуют скорости и изменения температуры  $\theta = 25$ , линии 2 –  $\theta = 10$ , линии 3 –  $\theta = 5$ , линии 4 –  $\theta = 1$ , линии 5 –  $\theta = 0.1$ .

Согласно графикам рис.1б, значение  $\sigma_f$  в конечной точке процесса нагрева и равные им значения  $\sigma_f$  в начальной точке процесса охлаждения монотонно уменьшаются с уменьшением скорости изменения температуры. Однако, в процессе охлаждения этот порядок не сохраняется! Так, при температуре  $M_s = 40^\circ \text{C}$   $\sigma_f$  при  $\theta = 1$  (линия 4) больше, чем та же величина при  $\theta = 0.1$  (линия 5), однако для большей части интервала температур охлаждения неравенство меняется на противоположное, и  $\sigma_f$  для меньшей скорости охлаждения превосходит  $\sigma_f$ , соответствующее большей скорости охлаждения. Именно поэтому возвращаемая деформация для скорости  $\theta = 0.1$  превосходит возвращаемую деформацию для скорости  $\theta = 1$ . Для  $\theta = 5$  величина  $\sigma_f$  при температуре  $M_s = 40^\circ \text{C}$  существенно выше, чем для обеих рассмотренных выше скоростей. Однако, с понижением температуры величина  $\sigma_f$  для  $\theta = 5$  резко падает и становится ниже той же величины для  $\theta = 0.1$  и  $\theta = 1$  на большей части интервала температур прямого превращения. В результате оказывается, что для  $\theta = 5$  возвращаемая деформация меньше, чем для обеих меньших скоростей изменения температуры  $\theta = 0.1$  и  $\theta = 1$ . Аналогичная ситуация наблюдается для еще более высокой скорости нагрева  $\theta = 10$ .

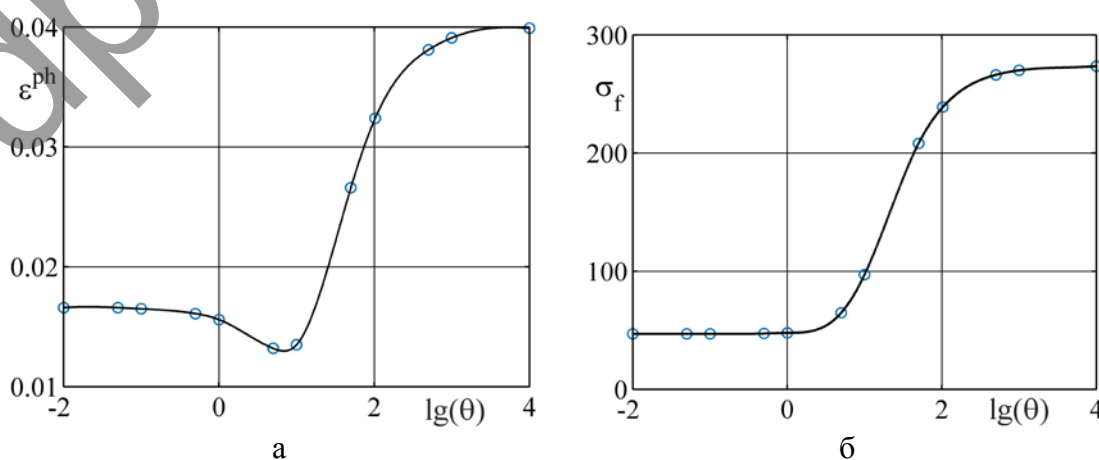


Рис.2.

На рис.2а приведен график зависимости от  $\lg(\theta)$  величин  $\varepsilon_f^{ph}$  в момент окончания прямого превращения. Как видно из рисунка, для величины  $\varepsilon^{ph}$

имеется два асимптотических значения, меньшее для  $\theta \rightarrow 0$  и большее, равное  $\varepsilon_0$  для  $\theta \rightarrow +\infty$ . Однако, меньшее из этих двух асимптотических значений  $\varepsilon^{ph}$  вовсе не является наименьшим на всем интервале  $\theta \in (0, +\infty)$ . При росте  $\theta$  от нуля величина  $\varepsilon^{ph}$  сначала монотонно убывает, достигает при некотором промежуточном значении  $\theta = \theta_1$  наименьшего значения, после чего монотонно возрастает.

На рис.2б приведен, полученный для тех же значений всех параметров график зависимости напряжения  $\sigma_f$  в волокнах из СПФ в момент начала процесса прямого превращения от  $\lg(\theta)$ . Следует отметить, что это значение напряжений в волокнах для небольших скоростей нагрева не является максимальным для всего процесса обратного превращения, см. рис.1б. Как видно величина  $\sigma_f$  также имеет два асимптотических значения, малое для  $\theta \rightarrow 0$  и большое для  $\theta \rightarrow +\infty$ . Однако, в отличие от фазовой деформации, величина  $\sigma_f$  на всем интервале  $\theta \in (0, +\infty)$  монотонно возрастает.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ЗАМКНУТОСТИ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ПЕТЛИ ОТ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА НАПОЛНЕНИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ СКОРОСТИ НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ

В данном разделе исследована возможность подбора значения коэффициента наполнения, при котором для случая фиксированной скорости изменения температуры  $\theta = 50$  возможно осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы. Анализ проведен для тех же, что и ранее значений параметров вязкоупругого связующего (3.1), (3.2). На рис.3а приведены графики зависимости фазовой деформации волокон композита при их нагреве (правые кривые) и охлаждении (левые кривые) для следующих значений коэффициента наполнения: кривая №4 –  $\mu = 0.05$ , №3 –  $\mu = 0.03$ , №2 –  $\mu = 0.01$ , №1 –  $\mu = 0.004$ . Согласно рис.3а, с уменьшением коэффициента наполнения возвращаемая деформация при охлаждении растет, однако достаточно медленно. Полный возврат заданной начальной деформации волокон  $\varepsilon_0 = 0.04$  достигается лишь при весьма малом значении коэффициента наполнения  $\mu = 0.004$ .

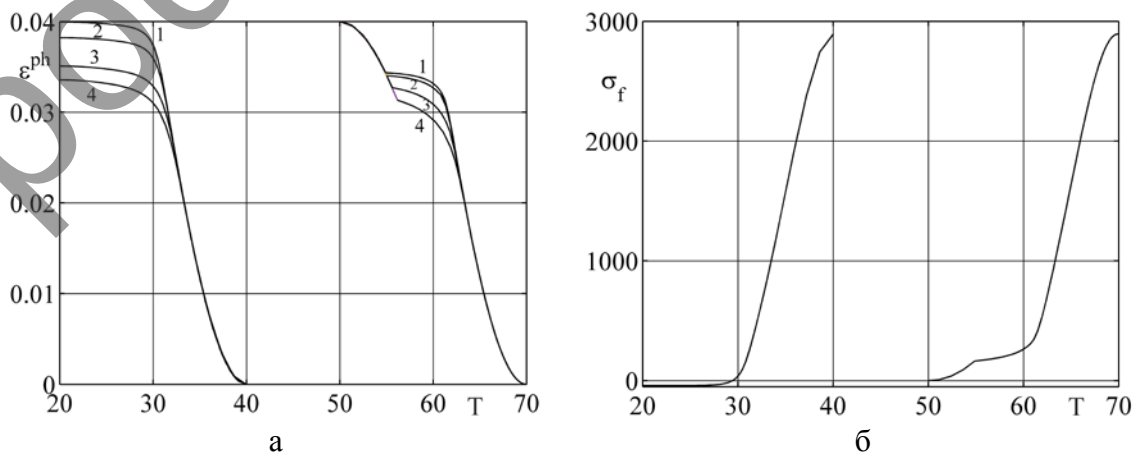


Рис.3.

На рис.3б приведены графики зависимости напряжения в волокнах  $\sigma_f$  от температуры при нагреве (правая кривая) и охлаждении (левая кривая) именно для такого значения коэффициента наполнения. Согласно этим графикам, максимальные напряжения в волокнах при таком низком коэффициенте наполнения чрезвычайно велики (почти достигают величины 3000 МПа), что не допустимо для СПФ типа никелида титана. Следовательно, получить замкнутый эффект для связующего с такими параметрами невозможно. Необходимо использовать более жесткое связующее, менее подверженное реономным эффектам, т.е. с большими значениями  $k/A$ .

## 5. СЛУЧАЙ ОТЛИЧИЯ СКОРОСТЕЙ НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ

Обычно охлаждение волокон композита происходит существенно медленнее, чем их нагрев. Поэтому важно получить деформационные петли при различных скоростях нагрева и охлаждения. Рис.4 получен для тех же, что и ранее значений параметров и функций связующего (3.1), (3.2) и коэффициента наполнения  $\mu = 0.251$ . Скорость нагрева обозначается как  $\theta$ , скорость охлаждения как  $\theta_1$ . При высоких равных скоростях нагрева и охлаждения  $\theta = \theta_1 = 1000$  наблюдается почти полный возврат деформаций при охлаждении (кривая 1). Линии 2,3,4,5 соответствуют одной и той же высокой скорости нагрева  $\theta = 1000$ , но уменьшающимися значениями скорости охлаждения  $\theta_1 = 100$  для кривой 2,  $\theta_1 = 10$  для кривой 3,  $\theta_1 = 5$  для кривой 4 и  $\theta_1 = 1$  для кривой 5. Если скорость нагрева остается высокой, а скорость охлаждения снижается, степень замкнутости петли снижается, и при  $\theta_1 = 1$  возвращаемая деформация близка к минимальному значению (чуть больше 0.015). Дальнейшее снижение скорости охлаждения при фиксированной высокой скорости нагрева ведет к небольшому монотонному росту возвращаемой деформации (на рис.4 не показано).

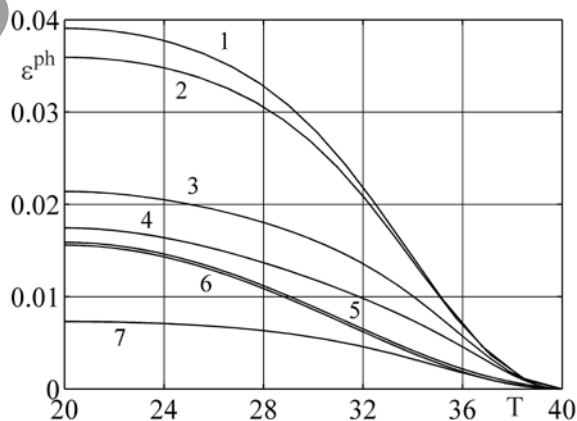


Рис.4.

Если снизить в 1000 раз и скорость нагрева, т.е. для случая  $\theta = \theta_1 = 1$ , возвращаемая деформация почти не меняется (линия 6, почти сливающаяся в масштабе рис.4 с линией 5). Отсюда следует, что в случае, если скорость охлаждения меньше или равна скорости нагрева, величина скорости нагрева практически не влияет на степень замкнутости деформационной петли. Скорость нагрева в этом случае увеличивать бессмысленно. Если скорость нагрева оставить

малой  $\theta = 1$ , а скорость охлаждения увеличить в 1000 раз:  $\theta_1 = 1000$  (кривая 7), то степень замкнутости не растет, а наоборот, уменьшается более чем в 2 раза по сравнению со случаем  $\theta = \theta_1 = 1$ . Т.е., при фиксированной малой скорости нагрева, гипотетическое увеличение в 1000 скорости охлаждения приводит не к росту, а к уменьшению более чем в два раза накапливаемой деформации прямого превращения, т.е. к уменьшению замкнутости петель.

## 6. ВЛИЯНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОГО МОДУЛЯ СВЯЗУЮЩЕГО К МГНОВЕННОМУ НА СТЕПЕНЬ ЗАМКНУТОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПЕТЕЛЬ

На рис.5 приведены графики зависимости от температуры фазовой деформации, накапливаемой в волокнах композита при их охлаждении через интервал температур  $(M_s, M_f)$  после нагрева через интервал температур  $(A_s, A_f)$  для  $\theta = 50$ ,  $\mu = 0.351$ ,  $A = 1.68$ . Кривые снизу вверх построены для значений отношения  $k/A = 0.19, 0.5, 1, 3, 5, 9$ , что соответствует значениям отношения длительного модуля и мгновенного  $E_\infty/E_m = 0.16, 0.33, 0.5, 0.75, 0.83, 0.9$ .

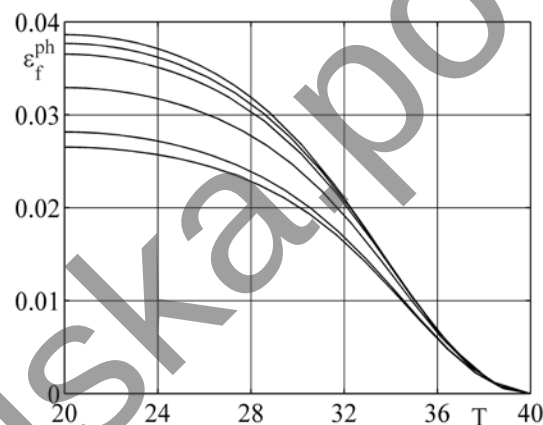


Рис.5.

Как видно, с ростом значения  $E_\infty/E_m$  величины фазовых деформаций для каждого значения  $T$ , в том числе и для последней точки графика охлаждения волокон монотонно растут, приближаясь для  $T = M_f$  при  $E_\infty/E_m \rightarrow 1$  к значению  $\varepsilon_0$ , т.е. к полностью замкнутой петле. Следовательно, для того, чтобы добиться осуществления замкнутого двойного эффекта памяти формы, следует выбирать связующее с высоким значением отношения  $k/A$ , или, что то же, с близким к единице значением отношения  $E_\infty/E_m$ . Тем не менее, при фиксированном значении коэффициента наполнения, которое обеспечивает осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы в случае упругого связующего, добиться осуществления этого эффекта даже при  $E_\infty/E_m = 0.9$  не удастся. Замкнутой петля получается лишь в пределе при  $E_\infty/E_m \rightarrow 1$ . Следовательно, наряду с повышением отношения  $E_\infty/E_m$  необходимо уменьшать величину коэффициента наполнения  $\mu$ , т.е. для заданного значения  $E_\infty/E_m$  подбирать величину  $\mu$ , при которой деформационная петля получится замкнутой.

## 7. ПОДБОР ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА НАПОЛНЕНИЯ ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО ЗАМКНУТОСТЬ ЭФФЕКТА ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ $E_\infty/E_m$ И $\theta$

В данном пункте приведены результаты подбора значений коэффициента наполнения, обеспечивающих для заданного значения скорости изменения температуры и фиксированного значения отношения  $k/A$  осуществления замкнутого двойного эффекта памяти формы. Все решения, получены для  $\varepsilon_0 = 0.04$ ,  $\theta = 48$ . В разделе 4 установлено, что для малых значений отношения параметров связующего  $k/A = 0.19$  подобрать приемлемое значение коэффициента наполнения не удастся (значение  $\mu$  получается слишком низким, а напряжения в волокнах – недопустимо высокими (рис.3б)). Здесь, в соответствие с рекомендациями предыдущего раздела, будут рассмотрены более высокие значения  $k/A$ .

На рис.6 рассмотрен случай  $k/A = 1$ , т.е.  $E_\infty/E_m = 0.5$ . При изменении коэффициента наполнения существенно меняются графики зависимости  $\varepsilon^{ph}$  от температуры, как при охлаждении, так и при нагреве (последние в области структурного превращения). Поэтому на рис.6а приведены, как графики, соответствующие нагреву (справа), так и графики, соответствующие последующему охлаждению (слева). Кривые снизу вверх соответствуют значениям коэффициента наполнения  $\mu = 0.251, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01, 0.0064$ . Последнее значение обеспечивает с достаточной точностью осуществление замкнутого эффекта памяти формы. Однако это значение коэффициента наполнения чрезвычайно мало. При таком значении  $\mu$  напряжения в волокнах принимают недопустимо высокие значения. Этот факт иллюстрируется на рис.6б, где приведены графики зависимости напряжения в волокнах от температуры при нагреве (правая кривая) и охлаждении (левая кривая) волокон для найденного значения коэффициента наполнения  $\mu = 0.0064$ . Как видно, напряжения в волокнах и для случая  $E_\infty/E_m = 0.5$  получились недопустимо велики (превосходят 2500 МПа). Следовательно, необходимо дальнейшее повышение отношения  $E_\infty/E_m$ .

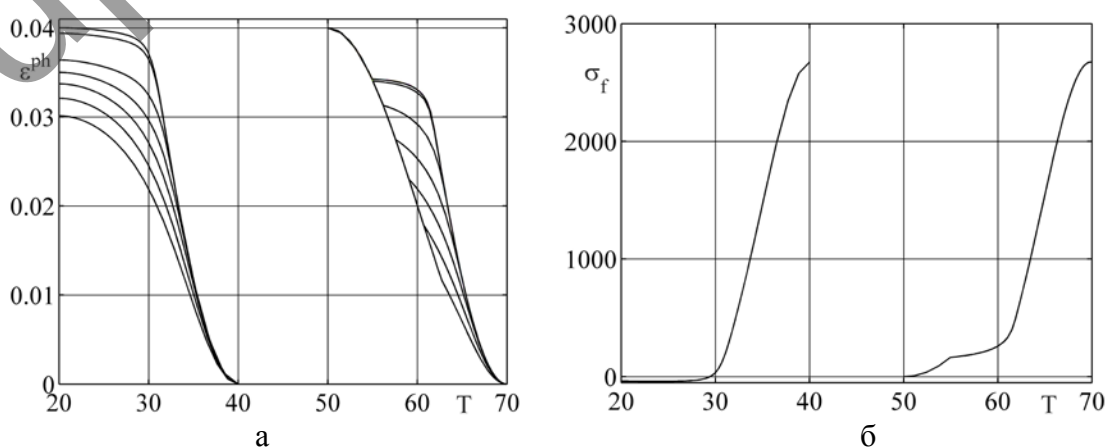


Рис.6.

На рис.7 приведены результаты аналогичных расчетов, но уже для  $k/A = 4$ , т.е.  $E_\infty = 0.8E_m$  (остальные параметры имеют такие же значения, как на рис.6). На рис.7а изображены графики зависимости деформации волокон из СПФ для процессов их нагрева (справа) и последующего охлаждения (слева), причем кривые снизу вверх соответствуют значениям коэффициента наполнения  $\mu$  равным 0.251, 0.2, 0.18, 0.15, 0.135. Последнее значение с хорошей точностью обеспечивает осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы.

На рис.7б изображены графики зависимости напряжений в волокнах  $\sigma_f$  от температуры при нагреве волокон (справа) и при их последующем охлаждении (слева). Кривые 1 соответствуют значению коэффициента наполнения  $\mu = 0.251$ , обеспечивающему осуществление замкнутого двойного эффекта памяти формы в случае упругого связующего, кривые 2 значению  $\mu = 0.135$ , обеспечивающего осуществление того же эффекта в случае вязкоупругого связующего, для которого  $E_\infty = 0.8E_m$ . Для такого значения отношения длительного модуля связующего к мгновенному максимальные значения напряжения в волокнах существенно уменьшились и достигли значений, не превышающих 500 МПа.

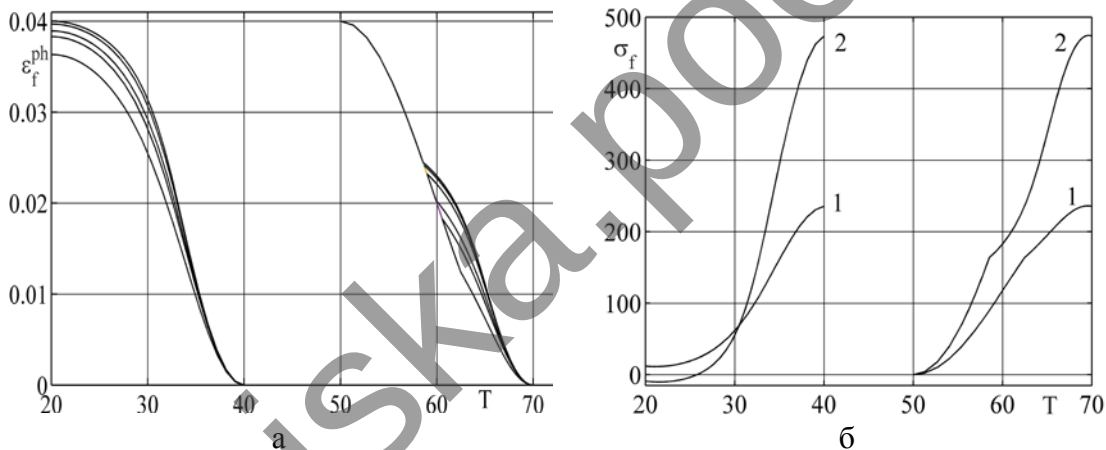


Рис.7.

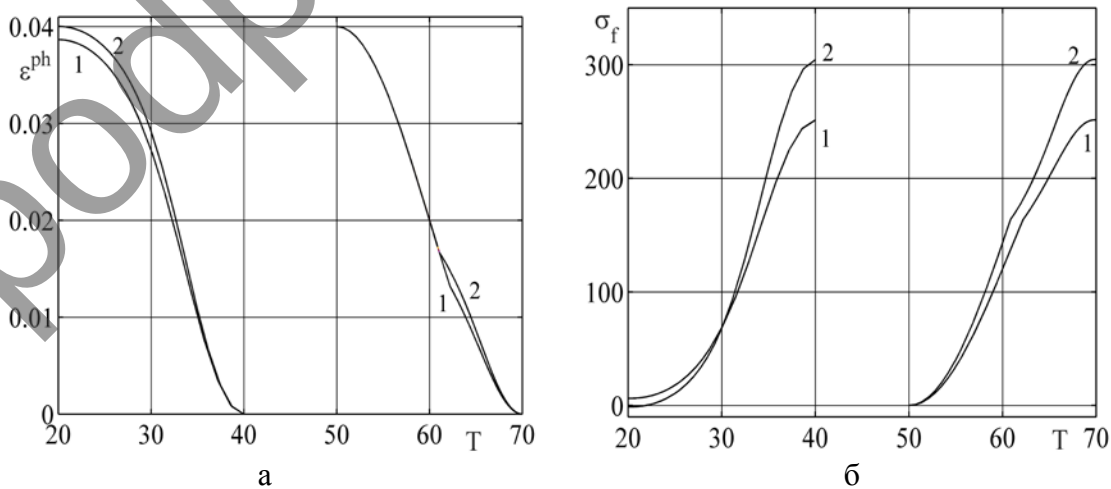


Рис.8.

Чтобы еще снизить максимальные значения напряжений в случае выполнения условий осуществления замкнутого эффекта памяти формы, следует взять связующее с еще большим значением отношения  $E_{\infty}/E_m = 0.9$  ( $k = 9A$ ). Графики зависимости деформаций от температуры для этого случая приведены на рис.8а для нагрева (справа) и для охлаждения (слева). Линии 1 соответствуют  $\mu = 0.251$ , линии 2 –  $\mu = 0.214$ , причем последнее значение обеспечивает осуществление замкнутого эффекта памяти формы. На рис.8б приведены графики изменения в тех же процессах напряжений в волокнах из СПФ. Линии 1 соответствуют  $\mu = 0.351$ , линии 2 – найденному значению  $\mu = 0.214$ . Как видно, максимальные значения напряжений еще уменьшились до приемлемых для никелида титана значений, немного превышающих 300 МПа.

#### **8. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ УПРУГОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЛИТЕЛЬНОГО МОДУЛЯ И ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МГНОВЕННОГО МОДУЛЯ ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Из-за определенных вычислительных трудностей, встречающихся при решении системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение композита с волокнами из СПФ и вязкоупругим связующим, возникает вопрос о правомерности приближенной оценки таких решений с помощью анализа аналогичных задач, но в предположении об упругом поведении связующего, для модуля Юнга матрицы, равного длительному модулю связующего. Ниже приведены сравнения двух пар таких решений, для двух вариантов параметров вязкоупругой модели:  $k = A$ ,  $E_{\infty} = 0.5E_m$  и  $k = 4A$ ,  $E_{\infty} = 0.8E_m$  ( $A = 1.68$ ). Сравнивались между собой графики зависимости фазово-структурной деформации волокон при их охлаждении, полученные для  $\mu = 0.251$  в следующих условиях:

1. Упругая задача для связующего при  $E_m = 2500$ .
2. Упругая задача для связующего при  $E_m = E_{\infty}$ .
3. Задача с вязкоупругим поведением связующего и  $E_m = 2500$  для скоростей изменения температуры, равных 100, 30, и т.д. до весьма малых скоростей порядка 3-0.1.

На рис.9а соответствующие графики изображены для случая  $k = A$ ,  $E_{\infty} = 0.5E_m$ . Согласно рисунку, решение в предположении упругого поведения связующего при значении  $E_m = 2500$  МПа (линия 1), для которого и найдено значение  $\mu = 0.251$ , действительно обеспечивает наличие этого эффекта. Переход от мгновенного модуля связующего к длительному модулю  $E = E_{\infty} = 1250$  МПа приводит к уменьшению возвращаемой при прямом превращении деформации и незамкнутости деформационной петли (толстая линия 6). Решение задачи для вязкоупругого поведения связующего со значением модуля  $E_m = 2500$  и скорости изменения температуры  $\theta = 100$  (линия 2) дает величину возвращаемой деформации, меньшей, чем для упругого решения с  $E_m = 2500$ , но несколько большей, чем для упругого решения с  $E_m = E_{\infty}$ . Уменьшение скорости  $\theta$  до 30 дает еще меньшее значение возвращаемой деформации (линия 3). Для  $\theta = 5$



(линия 4) и  $\theta=1$  (линия 5) значение возвращаемой деформации несколько увеличивается, приближаясь к величине, соответствующей линии 6. Линия, соответствующая  $\theta=0.1$ ,  $E=E_{\infty}=1250$  практически неразличима с линией 6, т.е. соответствующей упругому поведению связующего, обладающего модулем, равным длительному.

Совершенно аналогичная картина получается для вязкоупругого связующего с параметрами  $k=4A$ ,  $E_{\infty}=0.8E_m$ . На рис.9б изображены часть графиков зависимости фазовой деформации волокон от температуры при охлаждении волокон, примыкающих к температуре  $M_f$  и деформации  $\varepsilon_0=0.04$ .

Здесь упругое решение с  $E=E_{\infty}$  (толстая линия 4) лежит ниже упругого решения получаемого с использованием мгновенного модуля связующего (толстая линия 1), которое демонстрирует замкнутый эффект памяти формы. Решение для вязкоупругого связующего с модулем Юнга, равным мгновенному модулю связующего для  $\theta=100$  (линия 2) дает еще больший невозврат. Дальнейшее снижение скорости изменения температуры приводит к уменьшению невозврата ( $\theta=30$ , линия 3) и  $\theta=3$  (график практически не различим с линией 4, соответствующей упругому решению с  $E_m=E_{\infty}$ ).

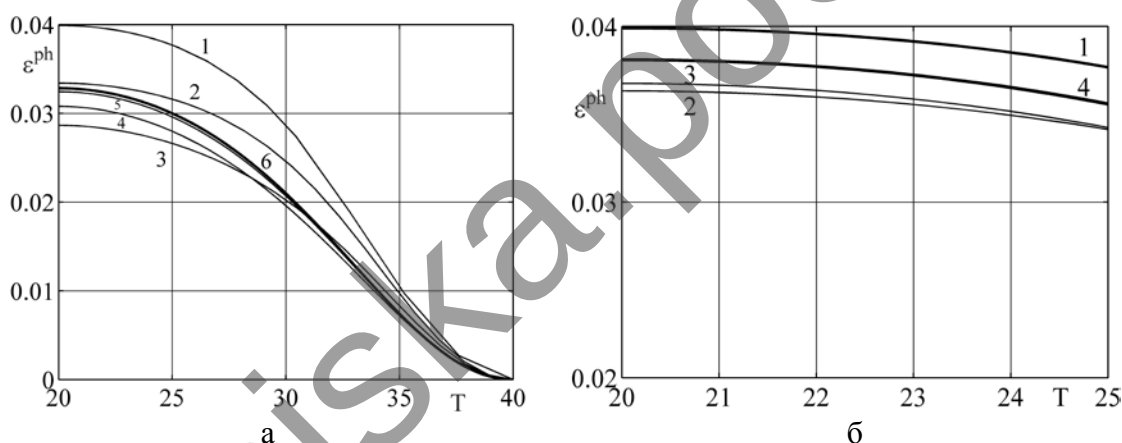


Рис.9.

Таким образом, зависимость фазово-структурной деформации волокон от температуры в КМ с вязкоупругим связующим и волокнами из СПФ при весьма малых скоростях изменения температуры можно получить из решения соответствующей задачи в предположении об упругом поведении связующего, при условии, что его модуль равен длительному модулю вязкоупругого связующего.

## 9. ПОДБОР ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА НАПОЛНЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО ЗАМКНУТОСТЬ ДВОЙНОГО ЭФФЕКТА ПАМЯТИ ФОРМЫ ПРИ ВЯЗКОУПРУГОМ СВЯЗУЮЩЕМ

Полученные в предшествующем пункте результаты свидетельствуют о возможности определения коэффициента наполнения для КМ с вязкоупругим связующим, обеспечивающего замкнутый двойной эффект памяти формы при весьма медленном изменении температуры по данным решения для композита с упругим связующим по следующему алгоритму. Искомое значение

коэффициента наполнения должно обеспечивать замкнутый эффект памяти формы для КМ с упругим связующим, модуль Юнга которого равен длительному модулю вязкоупругого связующего. Ниже этот алгоритм проверен для КМ с вязкоупругим связующим, у которого  $k = 4A$ , т.е.  $E_\infty = 0.8E_m = 2000$  МПа ( $E_m = 2500$  МПа). Расчеты проведены для  $A = 1.68$ .

Процесс определения соответствующего значения коэффициента наполнения по решению упругих задач изображен на рис.10а, где приведены части графиков зависимости фазовой деформации волокон при их охлаждении, расположенные вблизи оси деформаций в районе значения  $\varepsilon^{ph} \approx \varepsilon_0 = 0.04$ . Согласно этому рис., для упругого решения при модуле связующего, равного длительному модулю  $E_\infty = 0.8E_m = 2000$  МПа и коэффициенту наполнения  $\mu = 0.251$ , обеспечивающему замкнутый эффект при  $E_m = 2500$  МПа, наблюдается существенный невозврат деформации (линия 1). Уменьшение коэффициента наполнения до значения  $\mu = 0.2$  приводит к сверхвозврату (линия 2). Последовательный рост коэффициента наполнения в третьем знаке приводит к монотонному уменьшению возвращаемой деформации – линия 3, соответствующая  $\mu = 0.205$  и толстая линия 4 соответствующая требуемому значению  $\varepsilon^{ph} = \varepsilon_0 = 0.04$  при  $\mu = 0.209$ . Это значение и является прогнозом оптимального коэффициента наполнения для вязкоупругого связующего.

На рис.10б демонстрируется адекватность полученной оценки. Там приведены графики, соответствующие композиту с вязкоупругим связующим, найденным значением коэффициента наполнения  $\mu = 0.209$  и различными скоростями изменения температуры, равными для кривых снизу вверх вдоль оси деформаций  $\theta = 50, 200, 10, 1$ . Последняя (толстая) линия соответствует также  $\theta = 0.1$  и соответствует осуществлению замкнутого двойного эффекта памяти формы в случае вязкоупругого связующего при найденном из упругого решения значении коэффициента наполнения и достаточно малой скорости изменения температуры.

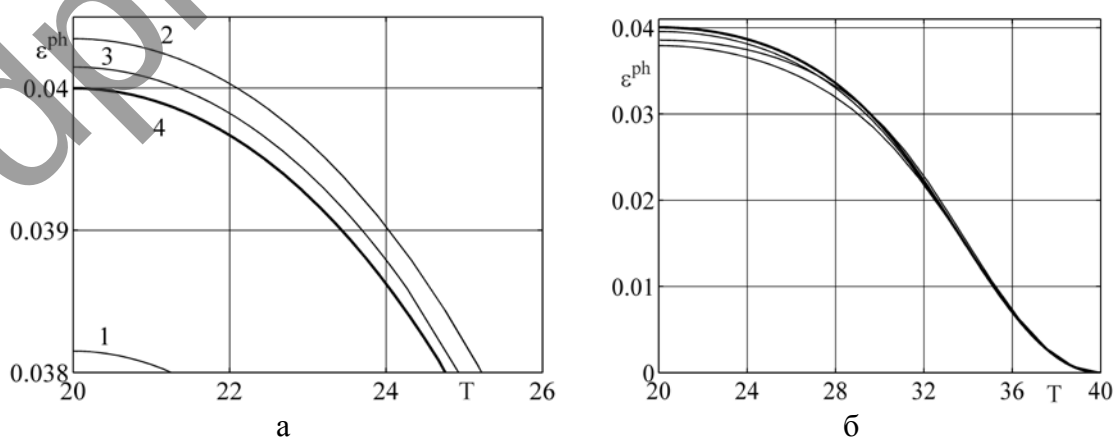


Рис.10.

Здесь опять проявляется обсужденная и объясненная ранее немонотонная зависимость величины возвращаемой деформации для КМ с вязкоупругим связующим от скорости изменения температуры. При уменьшении этой скорости от достаточно большой величины  $\theta = 200$  до  $\theta = 50$  степень возврата

уменьшается. Однако, дальнейшее уменьшение  $\theta$  до значений 10, и 1 приводит к росту возвращаемой деформации. Таким образом, минимальное значение возвращаемой деформации вовсе не соответствует наименьшей скорости изменения температуры. Найденное значение коэффициента наполнения, обеспечивающее осуществление замкнутого эффекта памяти формы при стремящейся к нулю скорости охлаждения, вовсе не обеспечивает замкнутость эффекта при всех скоростях охлаждения.

При реальном использовании рассматриваемого здесь композита процесс нагрева волокон может происходить достаточно быстро, а процесс их охлаждения – весьма медленно. В связи с этим возникает вопрос о том, будет ли найденное по упругому решению значение  $\mu = 0.209$  обеспечивать существование замкнутого двойного эффекта памяти формы для композита с вязкоупругим связующим в случае быстрого нагрева и последующего весьма медленного охлаждения. Для ответа на этот вопрос было проведено решение соответствующей задачи для вязкоупругого связующего, при  $\mu = 0.209$  и скорости нагрева  $\theta = 500$  при скорости охлаждения  $\theta_1 = 0.1$ . Результаты, изображенные на рис.11, свидетельствуют о том, что и в этом процессе замкнутый двойной эффект памяти формы имеет место. Более того, графики всех решений, соответствующих скоростям нагрева  $500 \geq \theta \geq 0.1$  и скорости охлаждения  $\theta_1 = 0.1$  не отличимы от кривых, изображенных на рис.11.

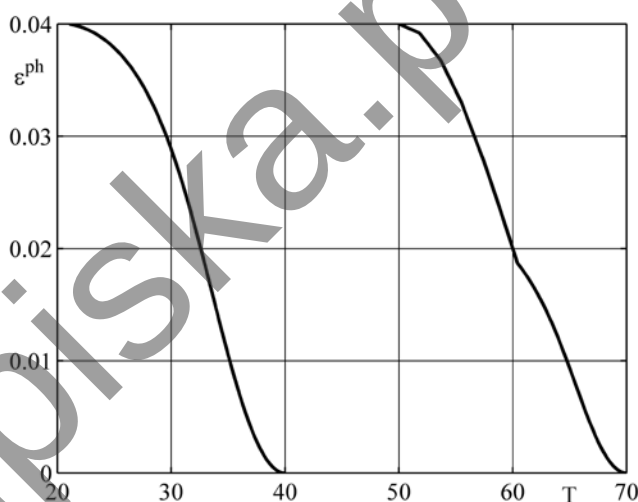


Рис.11.

#### 10. ВЛИЯНИЕ НА ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТА ВЕЛИЧИНЫ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО СВЯЗУЮЩЕГО А И К ПРИ ФИКСИРОВАННОМ СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ НИМИ

В [28] было установлено, что графики зависимости напряжений в волокнах КМ от температуры при их нагреве и охлаждении, происходящих при малой скорости изменения температуры  $\theta = 1/30$  зависят от отношения  $k/A$ , но не зависят при фиксированном значении этого отношения от самих величин  $A$  и  $k$ . Распространяется ли это положение на другие скорости изменения температуры и на зависимость деформации волокон от температуры, не было

установлено. В данном пункте проведена такая проверка путем решения несвязанной задачи при фиксированном значении  $k/A=1$  и различных величинах  $k=A$ . Результаты для деформаций при достаточно высокой скорости изменения температуры  $\theta=100$  приведены на рис.12а, где линия 1 соответствует  $A=A_1=1.68$ , линия 2 –  $A=2A_1$ , линия 3 –  $A=3A_1$ , линия 4 –  $A=4A_1$ , линия 5 –  $A=20A_1$ . Приведены лишь данные для этапа охлаждения волокон, поскольку для этапа нагрева заметных изменений при увеличении  $A$  в 20 раз не обнаружено. Согласно рис.12а для этапа охлаждения волокон зависимость графиков от величины  $A$  заметна и, более того, является немонотонной. При возрастании  $A$  до 4-х раз возвращаемая деформация убывает. Дальнейший рост  $A$  вплоть до 20-кратной величины приводит к росту возвращаемой деформации, хотя ее значение даже при 20-кратном увеличении  $A$  не достигает величины, достигаемой при однократном значении  $A=A_1$ .

На рис.12б для той же самой задачи приведены графики зависимости напряжений в волокнах от температуре при нагреве и охлаждении волокон со скоростью  $\theta=100$  при  $\mu=0.251$  и тех же значениях  $k=A$ . Согласно рис.12б графики зависимости  $\sigma_f$  от  $T$  при фиксированном отношении  $A/k=1$  и изменении самих величин  $A$  и  $k$  изменяются. С ростом величины  $A=k$  максимальное значение  $\sigma_f$ , достигаемое в конце процесса нагрева уменьшается, а значение напряжения, соответствующее концу процесса охлаждения, увеличивается.

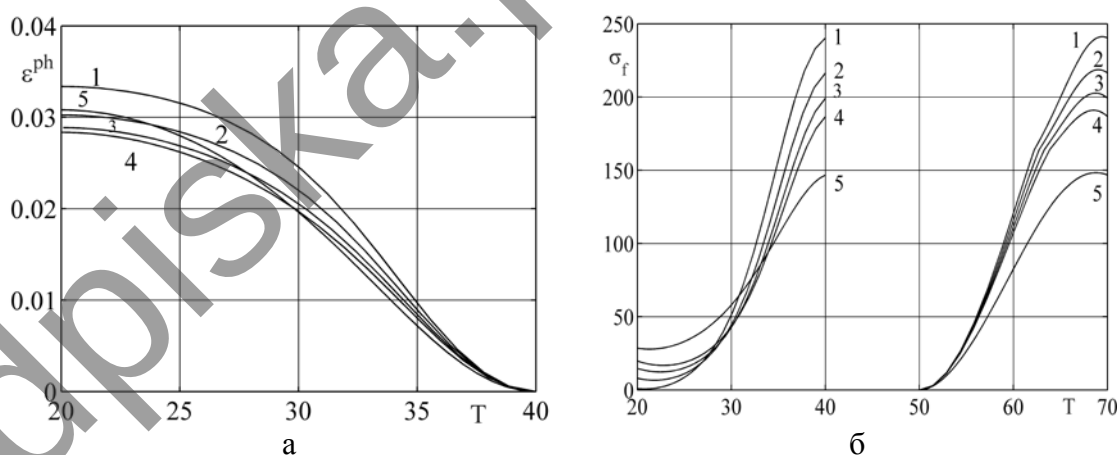


Рис.12.

Однако для очень малых значений скорости изменения температуры при  $k/A = \text{const}$  графики зависимости напряжений и фазово-структурных деформаций волокон не зависят от самих величин  $A$  или  $k$ . Этот факт иллюстрируется на рис.13а,б, где приведены графики зависимости напряжений в волокнах (рис.13а) и фазово-структурных деформаций в волокнах (рис.13б) от температуры при нагреве и охлаждении для малой скорости изменения температуры  $\theta=1/30$ , и  $k=A=1.68, 3.36, 5.04, 6.72, 13.44, 33.6$ . Результаты получены для  $\mu=0.251$ . Как видно для значений  $A=k$  различающихся в 20 раз графики соответствующих зависимостей не различаются. Связано такое поведение с тем, что при малых скоростях изменения температуры механическое поведение композита полностью определяется, помимо прочих материальных

постоянных величиной длительного модуля связующего, отношение которого к мгновенному модулю однозначно определяется величиной  $k/A$ , и при условии постоянства этого отношения не меняется при изменении самих величин  $k$  или  $A$ . Следует отметить, что в противоположном случае очень больших скоростей изменения температуры композит демонстрирует упругое поведение, также не зависящее от величин  $k$  или  $A$ .

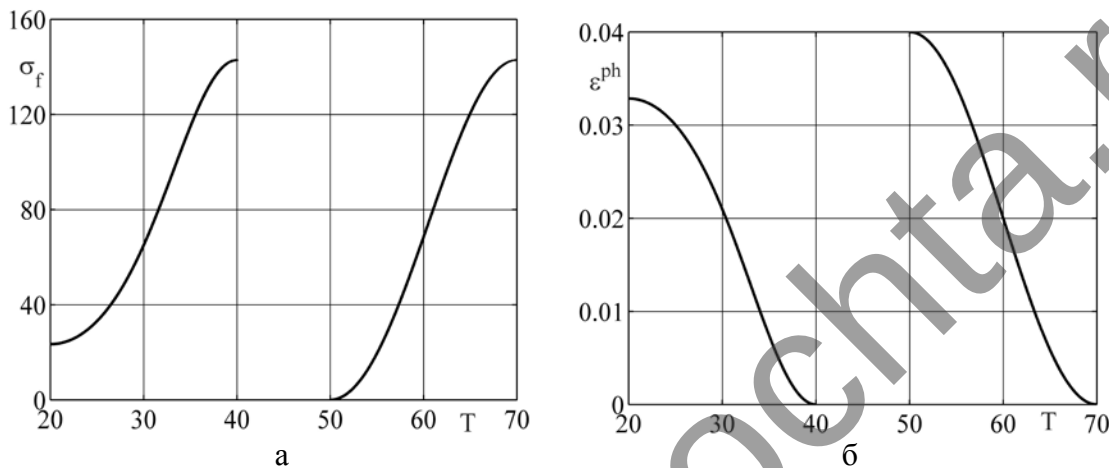


Рис.13.

## ВЫВОДЫ

1. Добиться замкнутого двойного эффекта памяти формы в КМ с волокнами из никелида титана и вязкоупругим связующим можно только используя достаточно жесткое связующее с  $E_{\infty} \geq 0.8E_m$ . Следует использовать полимерные связующие в стеклообразном состоянии. Для более мягких связующих коэффициент наполнения, обеспечивающий замкнутый двойной эффект памяти формы получается весьма мал, а напряжения в волокнах для начальной деформации  $\varepsilon_0 = 4\%$  недопустимо велики.

2. Величина возвращаемой в цикле нагрева и охлаждения волокон деформации является немонотонной функцией скорости изменения температуры. При уменьшении скорости изменения температуры от высоких значений величина возвращаемой деформации сначала падает, потом, при некотором значении скорости охлаждения достигает минимума и при дальнейшем уменьшении скорости изменения температуры увеличивается, асимптотически стремясь к некоторому значению, когда скорость охлаждения стремится к нулю.

3. Значение коэффициента наполнения, обеспечивающее замкнутый двойной эффект памяти формы в КМ с волокнами из СПФ и вязкоупругим связующим определяется следующим образом. Ищется оптимальных коэффициент наполнения для случая упругого связующего с модулем  $E_{\infty}$ . Именно при таком коэффициенте наполнения цикл для КМ с вязкоупругим связующим стремится к замкнутому для скорости изменения температуры, стремящейся к нулю. При этом для не слишком малых скоростей изменения температуры цикл опять становится не замкнутым.

4. В случае, когда скорость нагрева весьма велика, а скорость охлаждения волокон весьма мала, величина возвращаемой деформации определяется почти

исключительно скоростью охлаждения. Снижение скорости нагрева до малых значений, соответствующих скорости охлаждения практически не влияет на величину возвращаемой деформации. Если же скорость нагрева взять очень низкой, а скорость охлаждения очень высокой, то возвращаемая деформация резко падает по сравнению со случаем, когда обе эти скорости одинаково малы.

5. Для малых скоростей изменения температуры зависимость напряжений и фазовых деформаций в волокнах от температуры определяется величиной отношения  $k/A$  и при фиксированном значении этого отношения не меняется при изменении самих величин  $A$  и  $k$ . При средних значениях скорости изменения температуры наблюдается явная, причем немонотонная зависимость графика изменения деформации волокон от самих величин  $A$  и  $k$  даже при фиксированном значении отношения  $k/A = \text{const}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Jaronie Mohd Jani *Design Optimisation of Shape Memory Alloy Linear Actuator Applications* // A thesis submitted in fulfilment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy. School of Aerospace, Mechanical and Manufacturing Engineering. College of Science, Engineering and Health. RMIT University. – 2016. – 254 p.
2. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* // Scripta materialia. – 2004. – Vol.50. – Pp.249-253.
3. Yoshida Hitoshi *Creation of environmentally responsive composites with embended TiNi alloy as effectors* // Adv. Compos. Mater. – 1995. – Vol.5. – No.1 – Pp.1-16.
4. Smith C., Villanueva A., Joshi K., Tadesse Y., Priya S. *Working principle of bio-inspired shape memory alloy composite actuators* // Smart Materials and Structures. – 2011. – Vol.20. – No.1. – 012001.
5. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators* // Trans. ASME. J. of the Mechanical Design. – 1992. – Vol.114. – No.4. – Pp.670-676.
6. Ghomshei M.M. *Finite Element Modeling of Shape Memory Alloy Composite Actuators: Theory and Experiment* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2001. – Vol.12. – No.11. – Pp.761-773.
7. Lee J.J., Choi S. *Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators* // Composite Structures. – 1999. – Vol.47. – Pp.695-703.
8. Kabir M.-Z., Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams* // Composite Structures. – 2017. – Vol.168. – Pp.535-548.
9. Ren Y., Sun S. *An analytical model for shape memory alloy fiber-reinforced composite thin-walled beam undergoing large deflection* // Advances in Mechanical Engineering. – 2015. – Vol.7. – No.3. – Pp.1-14.
10. Lagoudas Dimitris C., Tadjbar Iradj G. *Active flexible rods with embedded SMA fibers* // Smart Mater. and Struct. – 1992. – Vol.1., – No.2. – Pp.162-167.
11. Zhang Y., Zhao Y.-P. *A study of composite beam with shape memory alloy arbitrarily embedded under thermal and mechanical loadings* // Materials & Design. – 2007. – Vol.28. – No.4. – Pp.1096-1115.

12. Viet N.V., Zaki W., Umer R. *Bending models for superelastic shape memory alloy laminated composite cantilever beams with elastic core layer* // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Vol.147. – Pp.86-103.
13. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates* / In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference. – 1989. – Part 4. – Pp.2011-2017.
14. Mohammad T., Jeng-Jong R., Chuh M. *Thermal post-buckling and aeroelastic behaviour of shape memory alloy reinforced plates* // Smart Materials and Structures. – 2002. – Vol.1. – No.2. – 297.
15. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.3393-3409.
16. Dano M.-L., Hyer M.W. *SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates* // Intern. J. of Solids and Structure. – 2003. – Vol.40. – Pp.5949-5972.
17. Wei Z.G., Sandstrom R., Miyazaki S. *Review. Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. Part II. Shape-memory hybrid composites* // Journal of Materials Science. – 1998. – Vol.33. – Pp.3763-3783.
18. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.7029-7044.
19. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2000. – Vol.37. – Pp.1577-1594.
20. Zheng Y., Cui L., Li Y., Stalmans R. *Partial transformation behavior of prestrained TiNi fibers in composites* // Material Letters. – 2001. – Vol.51. – Pp.425-428.
21. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Конструктивный двухпутевой эффект памяти формы, основанный на явлении ориентированного превращения* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. – №1. – С.55-60.
22. Wang Z.G., Zu X.T., Feng X.D., Zhu S., Bao J.W., Wang, L.M. *Characteristics of two-way shape memory TiNi springs driven by electrical current* // Materials & Design. – 2004. – Vol.25. – No.8. – Pp.699-703.
23. Gill J.J., Ho K., Carman G.P., *Three-dimensional thin-film shape memory alloy microactuator with two-way effect* // Journal of Microelectromechanical Systems. – 2002. – Vol.11. – No.1. – Pp.68-77.
24. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплавов с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №2. – С.29-48.
25. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
26. Мовчан А.А., Чернов М.И. *Нелинейный анализ термомеханического поведения однонаправленного композита с волокнами из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.221-241.
27. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы.* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.

28. Мовчан А.А., Чернов М.И. *Влияние вязкоупругих свойств связующего на поведение однонаправленного композита с волокнами из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.287-312.
29. Airoidi G., Ranucci T., Riva G., Sciacca A. *The two way memory effect by the pre-strain training method in a 50Ti40Ni10Cu (%at) alloy* // Scripta materialia. – 1996. – Vol.34. – No.2. – Pp.287-292.
30. H. Flores Zuniga, D. Rios-Jara, S. Belkahla, V. Nika, G. Guenin *The Training And Re-Training Procedures For The Two Way Memory Effect And Its Degradation In A Cu-Al-Be Alloy* // Scripta Materialia. – 1996. – Vol.34. – No.12. – Pp.1899-1904.
31. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
32. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
33. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
34. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
35. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
36. Кацнельсон М.Ю., Балаев Г.А. *Полимерные материалы. Свойства и применение*. – Л.: Химия, 1982. – 317 с.
37. Люкшин Б.А., Панин С.В., Корниенко Л.А., Люкшин П.А., Бочкарева С.А., Матолыгина Н.Ю., Гришаева Н.Ю., Реутов Ю.Я., Шилько С.В., Машков Ю.К., Плескачевский Ю.М., Кропотин О.В., Черноус Д.А. *Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения*. – М.: Изд-во СО РАН, 2017. – 311 с.

## REFERENCES

1. Jaronie Mohd Jani *Design Optimisation of Shape Memory Alloy Linear Actuator Applications*. A thesis submitted in fulfilment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy. School of Aerospace, Mechanical and Manufacturing Engineering. College of Science, Engineering and Health. RMIT University, 2016, 254 p.
2. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* Scripta materialia, 2004, Vol.50, Pp.249-253.
3. Yoshida Hitoshi *Creation of environmentally responsive composites with embended TiNi alloy as effectors*. Adv. Compos. Mater., 1995, Vol.5, No.1, Pp.1-16.
4. Smith C., Villanueva A., Joshi K., Tadesse Y., Priya S. *Working principle of bio-inspired shape memory alloy composite actuators*. Smart Materials and Structures, 2011, Vol.20, No.1, 012001.
5. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators*. Trans. ASME. J. of the Mechanical Design, 1992, Vol.114, No.4, Pp.670-676.
6. Ghomshei M.M. *Finite Element Modeling of Shape Memory Alloy Composite Actuators: Theory and Experiment*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2001, Vol.12, No.11, Pp.761-773.



7. Lee J.J., Choi S. *Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators*. Composite Structures, 1999, Vol.47, Pp.695-703.
8. Kabir M.-Z., Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams*. Composite Structures, 2017, Vol.168, Pp.535-548.
9. Ren Y., Sun S. *An analytical model for shape memory alloy fiber-reinforced composite thin-walled beam undergoing large deflection*. Advances in Mechanical Engineering, 2015, Vol.7, No3, Pp.1-14.
10. Lagoudas Dimitris C., Tadjbar Iradj G. *Active flexible rods with embedded SMA fibers*. Smart Mater. And Struct, 1992, Vol.1, No.2, Pp.162-167.
11. Zhang Y., Zhao Y.-P. *A study of composite beam with shape memory alloy arbitrarily embedded under thermal and mechanical loadings*. Materials & Design, 2007, Vol.28, No.4, Pp.1096-1115.
12. Viet N.V., Zaki W., Umer R. *Bending models for superelastic shape memory alloy laminated composite cantilever beams with elastic core layer*. Composites. Part B: Engineering, 2018, Vol.147, Pp.86-103.
13. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates*. In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, 1989, Part 4, Pp.2011-2017.
14. Mohammad T., Jeng-Jong R., Chuh M. *Thermal post-buckling and aeroelastic behaviour of shape memory alloy reinforced plates*. Smart Materials and Structures, 2002, Vol.1, No.2, 297.
15. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator*. Intern. J. of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.3393-3409.
16. Dano M.-L., Hyer M.W. *SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates*. Intern. J. of Solids and Structure, 2003, Vol.40, Pp.5949-5972.
17. Wei Z.G., Sandstrom R., Miyazaki S. *Review. Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. Part II. Shape-memory hybrid composites*. Journal of Materials Science, 1998, Vol.33, Pp.3763-3783.
18. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites*. Intern. J. of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.7029-7044.
19. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement*. Intern. J. of Solids and Structures, 2000, Vol.37, Pp.1577-1594.
20. Zheng Y., Cui L., Li Y., Stalmans R. *Partial transformation behavior of prestrained TiNi fibers in composites*. Material Letters, 2001, Vol.51, Pp.425-428.
21. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Konstruktivnyj dvukhputevoj ehffekt pamyati formy, osnovannyj na yavlenii orientirovannogo prevrashheniya [Structural two way shape memory effects due to oriented transformation phenomena]*. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin, 1998, No.1, Pp.55-60.
22. Wang Z.G., Zu X.T., Feng X.D., Zhu S., Bao J.W., Wang L.M. *Characteristics of two-way shape memory TiNi springs driven by electrical current*. Materials & Design, 2004, Vol.25, No.8, Pp.699-703.

23. Gill J.J., Ho K., Carman G.P., *Three-dimensional thin-film shape memory alloy microactuator with two-way effect*. Journal of Microelectromechanical Systems, 2002, Vol.11, No.1, Pp.68-77.
24. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Mekhanika aktivnykh kompozitov, sodержashhikh volokna ili sloi iz splavov s pamyat'yu formy [Mechanics of active composites, containing fibres or layers from shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1996, Vol.2, No.2, Pp.29-48.
25. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape - memory alloys*. Mechanics of Solid, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
26. Movchan A.A., Chernov M.I. *Nelinejnyj analiz termomekhanicheskogo povedeniya odnonapravlenno kompozita s voloknami iz splava s pamyat'yu formy [Nonlinear analysis of thermomechanical behavior of unidirectional composite with shape memory alloy fibers]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.221-241.
27. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
28. Movchan A.A., Chernov M.I. *Vliyanie vyazkoupругikh svoystv svyazuyushhego na povedenie odnonapravlenno kompozita s voloknami iz splava s pamyat'yu formy [Influence of the viscoelastic properties of the binder on the behavior of a unidirectional composite with shape memory alloy fibers]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.287-312.
29. Airolidi G., Ranucci T., Riva G., Sciacca A. *The two way memory effect by the pre-strain training method in a 50Ti40Ni10Cu (%at) alloy*. Scripta materialia, 1996, Vol.34, No.2, Pp.287-292.
30. Flores Zuniga H., Rios-Jara D., Belkahla S., Nika V. and Guenin G. *The Training And Re-Training Procedures For The Two Way Memory Effect And Its Degradation In A Cu-Al-Be Alloy*. Scripta Materialia, 1996, Vol.34, No.12, Pp.1899-1904.
31. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' ehlementov konstruksij [Creep of Structure Elements]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
32. Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An Introduction*. New York and London, Academic Press, 1971, 384 p.
33. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. Mechanics of Solids, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
34. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
35. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.4, Pp.301-308.
36. Katsnelson M.Yu., Balaev G.A. *Polimernye materialy. Svoystva i primeneniye [Polymeric materials. Properties and applications]*. Leningrad, Khimiya, 1982, 317 p.
37. Lyukshin B.A., Panin S.V., Kornienko L.A., Lyukshin P.A., Bochkareva S.A., Matolygina N.Yu., Grishaeva N.Yu., Reutov Yu.Ya., Shil'ko S.V., Mashkov Yu.K., Pleskachevskij Yu.M., Kropotin O.V., Chernous D.A. *Dispersno-napolnennyye*

polimernye kompozity tekhnicheskogo i meditsinskogo naznacheniya [*Dispersed-filled polymer composites for technical and medical purposes*]. Moskva, Izdatel'stvo SO RAN, 2017, 311 p.

*Поступила в редакцию 14 июня 2022 года.*

podpiska.pochta.ru

---

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., г.н.с. ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)

Чернов Михаил Игоревич – асп., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

УДК 539.3

EDN HSQEQY (<https://elibrary.ru/hsqeqy>)

## ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ\*

Старовойтов Э.И.<sup>1</sup>, Леоненко Д.В.<sup>1</sup>, Абдусаттаров А.<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь<sup>2</sup>Ташкентский государственный транспортный университет,  
г. Ташкент, Узбекистан

### АННОТАЦИЯ

Исследован изгиб упругопластической трехслойной круговой пластины при знакопеременном нагружении осесимметричной кольцевой нагрузкой. Учтено воздействие температурного поля. Пакет пластины несимметричен по толщине. Предполагается, что его деформирование подчиняется гипотезе ломаной линии. Внешние несущие слои принимаются тонкими, для них справедливы гипотезы Кирхгофа. Материалы несущих слоев упругопластические. В более толстом жестком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Изменение радиальных перемещений принимается линейным по толщине слоя. Материал заполнителя нелинейно упругий.

Пластина принимается теплоизолированной по торцу и внешней поверхности нижнего несущего слоя. Падающий перпендикулярно верхнему слою тепловой поток создает в пластине температурное поле. Формула для его расчета получена при помощи усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пакета. Учтено влияние температуры на упругие и пластические характеристики материалов слоев пластины.

Для вывода дифференциальных уравнений равновесия при первичном нагружении пластины применен вариационный метод Лагранжа. Учтена работа касательных напряжений в заполнителе в тангенциальном направлении. На контуре пластины сформулированы граничные условия. Рассмотрен случай кольцевой равномерно распределенной нагрузки. Для решения соответствующей краевой задачи применен приближенный метод, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Итерационное аналитическое решение выписано в функциях Бесселя. При повторном знакопеременном нагружении использована теория переменного нагружения Москвитина. Учтено упрочнение материала несущих слоев. Для полученных аналитических решений проведен численный анализ зависимости от физических уравнений состояния, температуры, граничных условий.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина; упругопластичность; знакопеременная кольцевая нагрузка; температурное поле; численные результаты

## BENDING OF A THREE-LAYER PLATE IN A TEMPERATURE FIELD ALTERNATING RING LOAD

Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A.

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

\* Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект №T22УЗБ-015).

## **ABSTRACT**

The bending of an elastic-plastic three-layer circular plate under alternating loading by an axisymmetric ring load is investigated. The effect of the temperature field is taken into account. The plate package is asymmetrical in thickness. It is assumed that its deformation obeys the polyline hypothesis. The outer bearing layers are assumed to be thin, and Kirchhoff's hypotheses are valid for them. The materials of the bearing layers are elastic-plastic. In a thicker rigid filler, Timoshenko's hypothesis about the straightness and incompressibility of the deformed normal is fulfilled. The change in radial displacements is assumed to be linear in the thickness of the layer. The filler material is non-linearly elastic.

The plate is assumed to be thermally insulated at the end and the outer surface of the lower bearing layer. The heat flow incident perpendicular to the upper layer creates a temperature field in the plate. The formula for its calculation is obtained by averaging the thermophysical characteristics of the materials of the layers over the thickness of the package. The influence of temperature on the elastic and plastic characteristics of the materials of the plate layers is taken into account.

The Lagrange variational method is used to derive differential equations of equilibrium under primary loading of the plate. The work of tangential stresses in the filler in the tangential direction is taken into account. Boundary conditions are formulated on the contour of the plate. The case of an annular uniformly distributed load is considered. To solve the corresponding boundary value problem, an approximate method based on the Ilyushin method of elastic solutions is applied. The resulting iterative analytical solution is written out in Bessel functions. The iterative analytical solution is written out in Bessel functions. In case of repeated alternating loading, Moskvitin's theory of alternating loading was used. The hardening of the material of the bearing layers is taken into account. For the obtained analytical solutions, a numerical analysis of the dependence on the physical equations of state, temperature, and boundary conditions is carried out.

**Keywords:** three-layer circular plate; elasticity; plasticity; alternating ring load; temperature field; numerical results

## **ВВЕДЕНИЕ**

Необходимость создания механико-математических моделей для расчета слоистых элементов конструкций, учитывающих физическую нелинейность составляющих материалов и воздействие внешней среды, обусловлено их широким использованием в технике, строительстве и транспортном машиностроении.

В монографиях [1-5] разрабатываются общие подходы к построению теорий деформирования неоднородных элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. В статье [6] приводится решение задачи о косом ударном нагружении трехслойной пластины. В работе [7] предложена уточненная теория свободных и вынужденных колебаний трехслойных пластин. Публикации [8,9] посвящены разработке теорий нелинейного деформирования трехслойных оболочек как с трансверсально-мягким заполнителем, так и с вязкоупругопластическими несущими слоями. Статья [10] посвящена изучению сверхзвуковых флаттерных характеристик многослойных композитных пластин. Нестационарное нагружение балки Тимошенко и сферической оболочки исследовано в [11,12].

В статьях [13-15] исследуются свободные и вынужденные колебания упругих трехслойных пластин и цилиндрических оболочек под действием непрерывных и локальных нагрузок различных видов. Для трехслойного пакета принята

кинематическая гипотеза ломаной линии, заполнитель легкий. Построена система собственных ортонормированных функций. Исследованы собственные частоты и амплитуды колебаний трехслойной оболочки при резонансных нагрузках.

Изучение несущей способности трехслойной волокнистой композитной пластины с отверстием проведено в [16]. Работы [17-20] посвящены исследованию изгиба сэндвич-пластин в зависимости от их формы, наличия упругих либо жестких опор, упругого основания, вида ячеистого заполнителя.

Термосиловое деформирование трехслойных несимметричных по толщине пластин, выполненных из функционально-градиентных материалов, рассмотрено в [21,22]. Квазистатическому деформированию многослойных пластин посвящены также статьи [23,24].

В публикациях [25,26] проведено исследование квазистатического термосилового нагружения упругопластических трехслойных стержней и оболочек. Для несущих слоев принимаются физические соотношения малых упругопластических деформаций, в них предполагается выполнение гипотез Кирхгофа. Заполнитель – нелинейно упругий, для него выполняется гипотеза Тимошенко. Решения получены в функциях Бесселя, проведена их численная апробация. Изгиб упругих и физически нелинейных трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем исследован в статьях [27,28]. Решения краевых задач о деформировании упругой круговой трехслойной пластины, расположенной на основании Пастернака, приведены в публикациях [29,30]. Деформирование трехслойных круглых пластин под действием неосесимметричных нагрузок рассмотрено в работах [31,32].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном деформировании трехслойной круговой пластины с упругопластическими несущими слоями и нелинейно упругим заполнителем при нагружении из естественного состояния и повторном знакопеременном нагружении кольцевой равномерно распределенной нагрузкой. Учтено воздействие температурного поля. Аналитическое решение получено в рекуррентном виде с использованием гипотезы Москвитина о переменном нагружении [33]. Проведено численное исследование полученных перемещений.

## 1. НАГРУЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть на трехслойную круговую пластину действует кольцевая равномерно распределенная нагрузка и падает тепловой поток (рис.1)

$$q = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad (1)$$

где  $H_0(r)$  функция Хевисайда нулевого порядка

$$H_0(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

При постановке краевой задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами  $h_1 \neq h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа. Для относительно толстого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ) принята гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Радиальные перемещения линейно изменяются по толщине слоев.

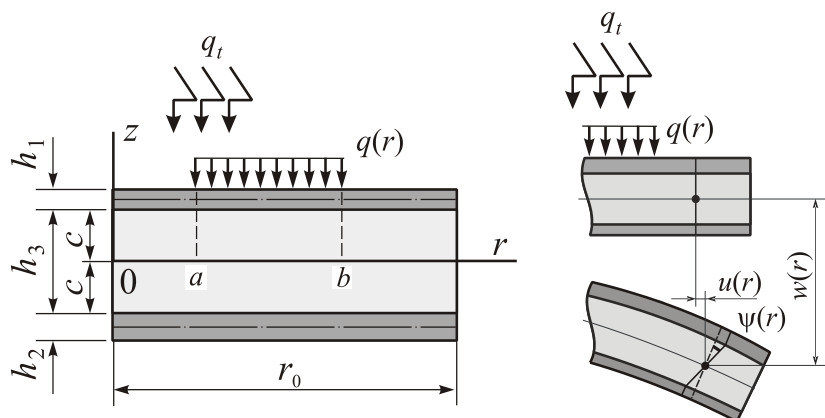


Рис.1. Нагружение трехслойной пластины.

На внешнюю поверхность первого слоя ( $z = c + h_1$ ) падает тепловой поток  $q_t$ . Пластина теплоизолированная по контуру и нижнему слою ( $z = -c - h_2$ ). В этом случае температурное поле  $T(t, z)$  определяется формулой, полученной с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пакета [4]

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (2)$$

где  $\tau = at/H^2$ ;  $s = z/H$ ;  $a = \lambda/C$ ;  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k/H$ ;  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k/H$ ;  $H$  – суммарная толщина пластины;  $\lambda_k$ ,  $C_k$ ,  $\rho_k$  – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотность материала  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ );  $t$  – время.

При осесимметричной нагрузке (1) окружных перемещений в слоях нет  $u_\phi^{(k)} = 0$ . Искомые функции при решении задачи будут: прогиб пластины  $w(r)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r)$  (см. рис.1) и радиальное перемещение координатной плоскости  $u(r)$ . На контуре пластины находится жесткая диафрагма, не позволяющая относительный сдвиг слоев ( $\psi = 0$  при  $r = r_0$ ).

Исходя из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,r} = \psi,$$

после интегрирования получим радиальные перемещения в слоях, выраженные через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (3)$$

где запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней соответствующей координате.

С помощью напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \phi$ ),  $\sigma_{rz}^{(3)}$ , возникающих в слоях, вводятся обобщенные внутренние усилия и моменты

$$T_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} dz, \quad M_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} z dz, \quad (4)$$

$$H_{\alpha} = M_{\alpha}^{(3)} + c(T_{\alpha}^{(1)} - T_{\alpha}^{(2)}), \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz.$$

Деформации в слоях можно получить с помощью соотношений Коши [4], используя перемещения (3). Для связи напряжений и деформаций применяются уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [34]

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \left(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)\right) \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T^{(k)}\right), \quad (5)$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \left(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)\right) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (k=1, 2, 3; \alpha=r, \varphi),$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые компоненты напряжений и деформаций в слоях;  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и деформация в заполнителе;  $G_k$ ,  $K_k$  – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования материалов;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного удлинения.

Функции пластичности материалов несущих слоев  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$  при  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$  следует положить  $\omega^{(k)} \equiv 0$  ( $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций;  $\varepsilon_y^{(k)}(T)$  – предел текучести по деформациям). Аналогично функция физической нелинейности заполнителя будет  $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = 0$ , если  $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$  ( $\varepsilon_s^{(3)}$  – предел физической нелинейности материала заполнителя).

Для функций пластичности принимается аналитический вид ( $T_0 = 293 \text{ K}$ )

$$\omega_1(\varepsilon_u, T_0) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_{y0}, \\ A_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_{y0}}{\varepsilon_u}\right)^{\alpha_1}, & \varepsilon_u > \varepsilon_{y0}, \end{cases} \quad (6)$$

где для дюралюминия  $A_1 = 0,96$ ;  $\alpha_1 = 2,34$ ;  $\varepsilon_{y0}(T_0) = 0,735\%$  [4].

Уравнения равновесия в обобщенных усилиях (4) для рассматриваемой упругой пластины получены в [4] без применения соотношений, связывающих напряжения и деформации, поэтому они остаются справедливыми и здесь. В случае нагрузки (1) система принимает вид

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_{\varphi}) = 0,$$

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_{\varphi}) - Q = 0, \quad (7)$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = q_0(H_0(b-r) - H_0(a-r)).$$

В напряжениях  $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\sigma_{rz}^{(3)}$ , используя соотношения (5), выделим линейные (индекс «e») и нелинейные (индекс «ω»), включающие температуру, составляющие



$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \\
\sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \left( \varepsilon_u^{(k)}, T \right) \varepsilon_{\alpha}^{(k)} + 3K_k \alpha_k T^{(k)}, \\
\sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \left( \varepsilon_u^{(3)}, T \right) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi).
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогичную операцию проведем с обобщенными внутренними усилиями и моментами

$$\begin{aligned}
T_{\alpha} &= T_{ae} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha} = M_{ae} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k)}, \\
H_{ae} &= M_{ae}^{(3)} + c \left( T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)} \right), \quad H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c \left( T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Входящие в (9) слагаемые  $T_{ae}^{(k)}, T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{ae}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{ae}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_e, Q_{\omega}$  вычисляются по формулам, совпадающим по виду с (4), в которых следует напряжения  $\sigma_{\alpha}^{(k)}$  заменить соответственно линейными  $\sigma_{ae}^{(k)}, \sigma_{rze}^{(3)}$  или нелинейными слагаемыми  $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$ , введенными в (8), например,

$$\begin{aligned}
M_{re} &= \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
&+ \left[ c K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
&+ \left[ c K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
&- \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\
M_{\alpha\omega} &= 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)} z \, dz + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z \, dz.
\end{aligned} \tag{10}$$

Систему дифференциальных уравнений для определения искомых функций  $u(r), \psi(r), w(r)$  получим из (7), подставив в нее обобщенные усилия, выраженные через эти функции с помощью соотношений (5). В результате имеем

$$\begin{aligned}
L_2 (a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p + p_{\omega}, \\
L_2 (a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2c G_3 \psi &= h_{\omega}, \\
L_3 (a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q_0 (H_0 (b-r) - H_0 (a-r)) + q_{\omega},
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $a_i$  – коэффициенты, определяемые через упругие и геометрические параметры слоев

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c (K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2 (K_{10} + K_{20}), \\
a_5 &= K_{32} + c (K_{11} + K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2},
\end{aligned}$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left[ K_k \left( T^{(k)} \right) + \frac{4}{3} G_k \left( T^{(k)} \right) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2);$$

$L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы второго и третьего порядков

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg) \right)_{,r}, \quad g_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Нелинейные составляющие внутренних усилий  $T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_{\omega}$  сгруппированы в правых частях системы (11) и входят в слагаемые с индексом « $\omega$ »

$$p_{\omega} = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_{\omega} = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_{\omega},$$

$$q_{\omega} = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}).$$
(12)

Система дифференциальных уравнений (11) является нелинейной. Для ее решения применим приближенный метод упругих решений Ильюшина, сходимость которого доказана в широких пределах [33]. Для  $n$ -ой итерации система (11) принимает следующий вид

$$L_2 \left( a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)} \right) = p_{\omega}^{(n-1)},$$

$$L_2 \left( a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)} \right) - 2c G_3 \psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)},$$

$$L_3 \left( a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)} \right) = -q_{\omega} \left( H_0 (b-r) - H_0 (a-r) \right) + q_{\omega}^{(n-1)}.$$
(13)

Входящие в (13) величины  $p_{\omega}^{(n-1)}, h_{\omega}^{(n-1)}, q_{\omega}^{(n-1)}$  служат «дополнительными» внешними нагрузками. На первом шаге итерации они нулевые, а в дальнейшем на каждом шаге они вычисляются по результатам предыдущего приближения в соответствии с формулами (12), в которых во все слагаемые нужно добавить сверху индекс « $n-1$ »

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} dz +$$

$$+ 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} dz,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz +$$

$$+ 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c \left( T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)} \right) \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$Q_{\omega}^{(n-1)} = \int_{-c}^c 2G_3 \omega_3^{n-1} \vartheta_{rz}^{(3,n-1)} dz, \quad \omega_k^{n-1} \equiv \omega_k \left( \varepsilon_u^{(k,n-1)}, T^{(k)} \right).$$
(14)

Таким образом, система дифференциальных уравнений (13) является на каждом шаге линейной. Для замыкания краевой задачи по определению

функций  $u^{(n)}$ ,  $\psi^{(n)}$ ,  $w^{(n)}$  необходимо добавить к системе уравнений (11) граничные условия. Рассмотрим двое из них, например,

- при заделанном контуре ( $r = r_0$ )

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0;$$

- при шарнирном опирании пластины по контуру ( $r = r_0$ )

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{re}^{(n)} - M_{ro}^{(n-1)} = 0, \quad (15)$$

где  $M_r^{(n)}$ ,  $M_{re}^{(n)}$ ,  $M_{ro}^{(n-1)}$  – обобщенные внутренние радиальные моменты на  $n$ -ом и  $n-1$ -ом шагах приближения, выражения для которых следуют из (9), (10).

Решение линейной системы (13) при непрерывной нагрузке известно [4]. Так как система дифференциальных уравнений (13) является линейной, то ее решение, полученное по аналогии, является рекуррентным решением задачи о деформировании рассматриваемой трехслойной упругопластической пластины

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3^{(n)} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r}^{(n)} - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8}{r}, \\ w^{(n)} &= \frac{1}{b_3} \left[ b_2 \int \psi^{(n)} dr + \int \left( \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right) dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} \right] + C_6 \ln r + C_4^{(n)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $I_1(\beta r)$ ,  $K_1(\beta r)$  – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда;  $C_1, C_2, \dots, C_8$  – константы интегрирования,  $\psi_r^{(n)}(r)$  – некоторое частное решение уравнения Бесселя, выделяемого из системы (13) для функции  $\psi^{(n)}$ ;  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  – линейные интегральные операторы

$$\begin{aligned} L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr, \\ \beta^2 &= \frac{2cb_3G_3}{b_1b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_3^2}{a_1}. \end{aligned}$$

Интегральный оператор от нагрузки (1) будет

$$\begin{aligned} \int L_3^{-1}(q) dr &= q_0 \left( \frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left( \frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left( \frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r) - \\ &- q_0 \left( \frac{r^4 - 5a^4}{64} + \frac{a^2 r^2}{16} - \left( \frac{a^4}{16} + \frac{a^2 r^2}{8} \right) \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r). \end{aligned} \quad (17)$$

Частное решение  $\psi_r^{(n)}$  для сдвига в заполнителе и интеграл от сдвига на  $n$ -ом шаге будут

$$\psi_r^{(n)}(r) = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \left\{ H_0(b-r) \left[ \frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -H_0(a-r)\left[\frac{a^2}{r}-r+2a(K_1(\beta a)I_1(\beta r)-I_1(\beta a)K_1(\beta r))\right]\Bigg\}+\frac{C_1^{(n)}\gamma_1}{\beta^2 r}- \\
& -K_1(\beta r)\left[\frac{b_3}{b_1 b_3-b_2^2}\left[\int I_1(\beta r)h_\omega^{(n-1)}r\,dr-\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{a_1 b_3}\int I_1(\beta r)p_\omega^{(n-1)}r\,dr\right]-\right. \\
& \left.-\gamma_1\int I_1(\beta r)\left(\int q_\omega^{(n-1)}r\,dr\right)dr\right]+ \\
& +I_1(\beta r)\left[\frac{b_3}{b_1 b_3-b_2^2}\left[\int K_1(\beta r)h_\omega^{(n-1)}r\,dr-\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{a_1 b_3}\int K_1(\beta r)p_\omega^{(n-1)}r\,dr\right]-\right. \\
& \left.-\gamma_1\int K_1(\beta r)\left(\int q_\omega^{(n-1)}r\,dr\right)dr\right], \\
\int \psi^{(n)}\,dr & =\frac{C_2^{(n)}I_0(\beta r)}{\beta}-\frac{C_3^{(n)}K_0(\beta r)}{\beta}+\frac{C_1^{(n)}\gamma_1\ln(r)}{\beta^2}+\frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2}\times \\
& \times\left\{H_0(b-r)\left[\frac{b^2-r^2}{2}+b^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{2b}{\beta}(K_1(\beta b)I_0(\beta r)+I_1(\beta b)K_0(\beta r))-\frac{2}{\beta^2}\right]-\right. \\
& -H_0(a-r)\left[\frac{a^2-r^2}{2}+b^2\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{2a}{\beta}(K_1(\beta a)I_0(\beta r)+I_1(\beta a)K_0(\beta r))-\frac{2}{\beta^2}\right]\Bigg\}- \\
& -\int\left(K_1(\beta r)\left[\frac{b_3}{b_1 b_3-b_2^2}\left[\int I_1(\beta r)h_\omega^{(n-1)}r\,dr-\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{a_1 b_3}\int I_1(\beta r)p_\omega^{(n-1)}r\,dr\right]-\right.\right. \\
& \left.-\gamma_1\int I_1(\beta r)\left(\int q_\omega^{(n-1)}r\,dr\right)dr\right]+ \\
& +I_1(\beta r)\left[\frac{b_3}{b_1 b_3-b_2^2}\left[\int K_1(\beta r)h_\omega^{(n-1)}r\,dr-\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{a_1 b_3}\int K_1(\beta r)p_\omega^{(n-1)}r\,dr\right]-\right. \\
& \left.-\gamma_1\int K_1(\beta r)\left(\int q_\omega^{(n-1)}r\,dr\right)dr\right]\Bigg)dr.
\end{aligned}$$

(18)

В случае заделки или шарнирного опирания контура пластины  $r=r_0=1$  должны выполняться условия  $\psi^{(n)}=w^{(n)}=0$ . В центре пластины решение должно быть ограничено. Отсюда получаем следующие константы интегрирования

$$C_1^{(n)}=-\frac{q_0(b^2-a^2)}{2}, \quad C_6^{(n)}=\frac{q_0(b^4-a^4)}{16b_3}, \quad C_8^{(n)}=0,$$

$$\begin{aligned}
C_3^{(n)} & =\frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2}(bI_1(\beta b)-aI_1(\beta a))+ \\
& +\left[\frac{b_3}{b_1 b_3-b_2^2}\left(\int I_1(\beta r)h_\omega^{(n-1)}r\,dr-\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{a_1 b_3}\int I_1(\beta r)p_\omega^{(n-1)}r\,dr\right)-\right. \\
& \left.-\gamma_1\int I_1(\beta r)\left(\int q_\omega^{(n-1)}r\,dr\right)dr\right]\Bigg|_{r=0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^{(n)} = & -\frac{1}{I_1(\beta)} \left( C_3^{(n)} K_1(\beta) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{I_1(\beta)} \times \\
& \times \left( -K_1(\beta) \left[ \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[ \int I_1(\beta r) h_{\omega}^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_{\omega}^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left( \int q_{\omega}^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \right|_{r=1} + \\
& + I_1(\beta) \left[ \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[ \int K_1(\beta r) h_{\omega}^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_{\omega}^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\
& \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left( \int q_{\omega}^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \Big|_{r=1} \Big), \\
C_4^{(n)} = & -\frac{C_1^{(n)}}{4b_3} - \frac{C_5^{(n)}}{4b_3} - \\
& - \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr \Big|_{r=1} - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1} \left( p_{\omega}^{(n-1)} \right) dr \Big|_{r=1} + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1} \left( q_{\omega}^{(n-1)} \right) dr \Big|_{r=1}.
\end{aligned} \tag{19}$$

При шарнирно опертом контуре пластины должны выполняться еще два условия  $u^{(n)} = 0$ ,  $M_{re}^{(n)} = M_{r\omega}^{(n-1)}$ . Отсюда константы интегрирования  $C_5^{(n)}$ ,  $C_7^{(n)}$

$$\begin{aligned}
C_5^{(n)} = & 2 \frac{a_7 a_1 + a_3^2}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1} \left( q_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1} \left( p_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1} + \\
& + \frac{b_3}{a_6 + a_7} 2 \left( L_3^{-1} \left( q_{\omega}^{(n-1)} \right) \right)_{,r} \Big|_{r=1} - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left( 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T^{(k)} z dz + M_{r\omega}^{(n-1)} \right) + \\
& + \left( b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \left( \frac{C_1^{(n)}}{2b_3} + 2C_6^{(n)} \right), \\
C_7^{(n)} = & -2 \frac{a_6}{b_3 a_1} L_2^{-1} \left( p_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1} + 2 \frac{a_3}{b_3 a_1} L_3^{-1} \left( q_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1} - \\
& - \frac{a_3}{2b_3 a_1} C_1^{(n)} - 2 \frac{a_3}{a_1} C_6^{(n)} - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5^{(n)}.
\end{aligned} \tag{20}$$

При защемленном контуре аналогичные константы следуют из условий  $u^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0$  при  $r = 1$

$$\begin{aligned}
C_5^{(n)} = & -2b_3 C_6^{(n)} - \frac{C_1^{(n)}}{2} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1} \left( p_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1} + 2 L_3^{-1} \left( q_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1}, \\
C_7^{(n)} = & -\frac{2}{a_1} L_2^{-1} \left( p_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, на первом цикле нагружения (нагружение из естественного состояния) упругопластической трехслойной пластины кольцевой нагрузкой прогиб  $w^{(n)}(r)$ , радиальное перемещение  $u^{(n)}(r)$  и сдвиг в заполнителе  $\psi^{(n)}(r)$

определяются формулами (16). Входящие в них интегралы от кольцевой нагрузки и сдвига определяются формулами (17), (18), константы интегрирования при шарнирно опертом или защемленном контуре – формулами (19)-(21). При этом решение явным образом зависит от температуры через константы  $C_5$ ,  $C_7$  в случае шарнирно опертого контура.

*Численные результаты.* Рассмотрим трехслойную круговую пластину со слоями из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т и шарнирно опертым контуром. Функция пластичности дюралюминия принята в виде (6), функции нелинейности фторопласта – в подобном виде. Соответствующие параметры нелинейности и упругости приведены в [4]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу  $r_0$ , при расчетах принимались следующие:  $h_1=0,02$ ;  $h_2=0,06$ ;  $h_3=0,4$ . Температура считалась осредненной по толщине пластины. Зависимость модулей упругости от температуры описывается известной линейной формулой Белла [4]. Кольцевая нагрузка принята постоянной относительной ширины  $b-a=0,25$ .

Графики на рис.2 позволяют анализировать сходимость метода упругих решений. Нагрузка  $q_0=5$  МПа принималась распределенной по всей верхней поверхности пластины, температура –  $T_2=323$  К:  $a$  – относительный сдвиг  $\psi(r)$ ;  $b$  – прогиб пластины  $w(r)$ . Номер кривой совпадает с номером приближения. За искомое решение принято 5-е приближение, которое отличается от предыдущего примерно на 0,5%. Отличие от упругого решения составляет 19%.

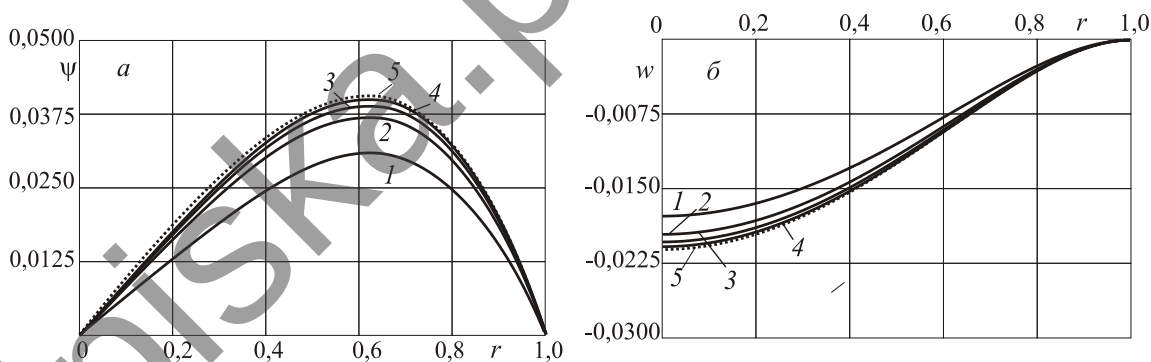


Рис.2. Сходимость метода упругих решений ( $T_2=323$  К).

По рис.3 можно судить об изменении прогиба в центре пластины в зависимости от внутреннего радиуса кольца нагрузки (см. рис.1): 1, 2 – упругий и физически нелинейный прогиб при комнатной температуре  $T_1=293$  К; 3, 4 – упругий и физически нелинейный прогиб при осредненной температуре  $T_2=323$  К. Интенсивность распределенной нагрузки здесь  $q_0=8$  МПа.

При внутреннем радиусе кольца  $a=0$  нагрузка распределена по кругу радиуса  $b$ . Если  $a=0,75$ , то нагрузка примыкает к контуру пластины. Максимум прогиба достигает при кольцевой нагрузке, расположенной в средней части пластины ( $a=0,25$ ).

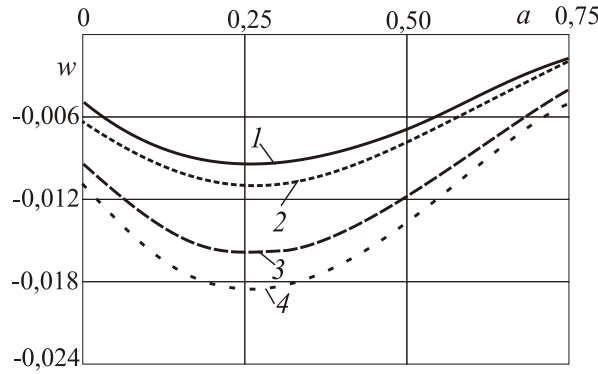


Рис.3. Упругий и физически нелинейный прогибы в центре пластины ( $T_1 = 293$  К,  $T_2 = 323$  К).

## 2. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ

Предположим, что с момента  $t = t_1$ , мгновенно происходит разгрузка и последующее нагружение пластины усилиями  $q''(r)$

$$q''(r) = -q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)). \quad (22)$$

При этом считаем, что в течение этого процесса температура  $T_1$  во всех точках пластины остается неизменной, равной температуре при начале разгрузки, т.е.  $T_1(z) = T(z, t_1)$ .

Эта нагрузка создаст в рассматриваемой трехслойной пластине перемещения  $u''$ ,  $\psi''$ ,  $w''$ , деформации  $\varepsilon''^{(k)}$  и напряжения  $\sigma''^{(k)}$ ,  $\sigma''^{(3)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ). Следуя теории Москвитина [33], введем для напряжений, деформаций, перемещений и нагрузок разности

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(k)*} &= \sigma_{\alpha}^{(k)} - \sigma_{\alpha}^{(k)*}, \quad \sigma_{rz}^{(3)*} = \sigma_{rz}^{(3)} - \sigma_{rz}^{(3)*}, \\ s_{\alpha}^{(k)*} &= s_{\alpha}^{(k)} - s_{\alpha}^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = \sigma^{(k)} - \sigma^{(k)*}, \\ \varepsilon_{\alpha}^{(k)*} &= \varepsilon_{\alpha}^{(k)} - \varepsilon_{\alpha}^{(k)*}, \quad \varepsilon_{rz}^{(3)*} = \varepsilon_{rz}^{(3)} - \varepsilon_{rz}^{(3)*}, \\ \vartheta_{\alpha}^{(k)*} &= \vartheta_{\alpha}^{(k)} - \vartheta_{\alpha}^{(k)*}, \quad \varepsilon^{(k)*} = \varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k)*}, \\ \psi'' &= \psi' - \psi^*, \quad u'' = u' - u^*, \quad w'' = w' - w^*, \end{aligned} \quad (23)$$

$$q^*(r) = q(r) - q''(r) = 2q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)),$$

где одним штрихом помечены параметры НДС пластины перед разгрузкой, двумя штрихами – аналогичные величины при повторном нагружении.

Перемещения и деформации со звездочками (23) в несущих слоях будут связаны соотношениями Коши. Физические уравнения состояния для напряжений и деформаций, отмеченных звездочками, принимаются типа (5)

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)*} &= 2G_k (1 - \omega_k^*) \vartheta_{\alpha}^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k \varepsilon^{(k)*}, \\ s_{rz}^{(3)*} &= 2G_3 (1 - \omega_k^*) \vartheta_{rz}^{(3)*} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $G_k(z) = G_k(T_1(z))$ ,  $K_k(z) = K_k(T_1(z))$  – значения модулей упругости, зафиксированные в момент разгрузки.

В отличие от уравнений состояния (5), температура в соотношения (24) в явном виде не входит. Материал заполнителя принят нелинейно упругим, поэтому его нелинейные параметры при циклическом деформировании не изменяются.

Следуя методике Москвитина [33], полагаем, что универсальные функции нелинейности со звездочками, введенные в (24) подобны функциям пластичности при нагружении на первом цикле (6)

$$\omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, T_1) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_{y1}^{(k)*}, \\ A_1^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_{y1}^{(k)*}}{\varepsilon_u^{(k)*}} \right)^{\alpha_1^*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_{y1}^{(k)*}, \end{cases} \quad (25)$$

где для дюралюминия  $A_1^* = 0,924$ ;  $\alpha_1^* = 2,27$ ;  $\varepsilon_{y1}^*(T_1) = \beta_1 \varepsilon_{y1}(T_1)$ ;  $\beta_1 = 2,02$  [4].

Проведя операцию вывода уравнений равновесия для величин со звездочками получим систему дифференциальных уравнений, совпадающую по виду с (11). Для ее решения применим метод упругих решений. Соответствующие итерационные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)*} + a_2 \psi^{(n)*} - a_3 w_{,r}^{(n)*}) &= +p_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_2(a_2 u^{(n)*} + a_4 \psi^{(n)*} - a_5 w_{,r}^{(n)*}) - 2cG_3 \psi^{(n)*} &= h_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_3(a_3 u^{(n)*} + a_5 \psi^{(n)*} - a_6 w_{,r}^{(n)*}) &= -q^{(n)*} + q_{\omega}^{(n-1)*}. \end{aligned} \quad (26)$$

Дополнительные «внешние» нагрузки  $p_{\omega}^{(n-1)*}$ ,  $h_{\omega}^{(n-1)*}$ ,  $q_{\omega}^{(n-1)*}$  в (26), на первом шаге ( $n=1$ ) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам типа (12)

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)*} &= T_{r\omega}^{(n-1)*},_r + \frac{1}{r} (T_{r\omega}^{(n-1)*} - T_{\phi\omega}^{(n-1)*}), \\ h_{\omega}^{(n-1)*} &= H_{r\omega}^{(n-1)*},_r + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)*} - H_{\phi\omega}^{(n-1)*}) - Q_{\omega}^{(n-1)*}, \\ q_{\omega}^{(n-1)*} &= M_{r\omega}^{(n-1)*},_{rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega}^{(n-1)*},_r - M_{\phi\omega}^{(n-1)*},_r), \\ T_{\alpha\omega}^{(n-1)*} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)*} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k,n-1)*}, T_k) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)*} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)*} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)*} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k,n-1)*}, T_k) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)*} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)*} &= M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)*} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)*} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)*}), \\ Q_{\omega}^{(n-1)*} &= \int_{-c}^c 2G_k \omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(3,n-1)*}, T^{(k)}) \vartheta_{rz}^{(3,n-1)*} dz \quad (\alpha = r, \phi). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь внутренние обобщенные усилия со звездочками отличаются от (14) отсутствием температуры.

Краевая задача для определения функций  $u^{(n)*}(r)$ ,  $\psi^{(n)*}(r)$ ,  $w^{(n)*}(r)$  замыкается присоединением к системе уравнений (26) с учетом (27) силовых или кинематических граничных условий, типа (15).



В этом случае полученная краевая задача для величин со звездочками  $u^{(n)*}$ ,  $\psi^{(n)*}$ ,  $w^{(n)*}$  совпадает с краевой задачей для некоторой фиктивной трехслойной упругопластической пластины, которая испытывает изотермическое нагружение из естественного состояния внешними усилиями  $q^*$ . Фиктивная пластина геометрически совпадает с рассматриваемой. Ее упругопластические свойства материалов характеризуются переменными по координатам модулем сдвига  $G_k(z)$ , объемным модулем  $K_k(z)$ , универсальными функциями нелинейности (25). Система дифференциальных уравнений для величин со звездочками (26) с точностью до обозначений совпадает с (13) и отличается только отсутствием температурных слагаемых в (8), (9). Аналитическое решение этой краевой задачи можно получить из решения (16), в котором необходимо формально заменить нагрузку и функции нелинейности на соответствующие величины со звездочками

$$\begin{aligned}\psi^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)*}, \\ w^{(n)*} &= \frac{1}{b_3} \left[ b_2 \int \psi^{(n)*} dr + \int \left( \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + L_3^{-1}(q^* - q_\omega^{(n-1)*}) \right) dr - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_1^{(n)*}}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4} \right] + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\ u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)*},_r - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)*} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r},\end{aligned}\quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_r^{(n)*} &= \frac{2\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[ \frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\ &\quad - K_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[ \int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left( \int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] + \\ &\quad + I_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[ \int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left( \int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right], \\ \int L_3^{-1}(q^*) dr &= 2q_0 \left( \frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r), \\ \int \psi^{(n)*} dr &= \frac{C_2^{(n)*} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)*} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{2\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \\ &\quad \times \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \\ &\quad - \int \left[ K_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[ \int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_1 \int I_1(\beta r) \left( \int q_{\omega}^{(n-1)*} r dr \right) dr \Big] + \\
& + I_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[ \int K_1(\beta r) h_{\omega}^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_{\omega}^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\
& \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left( \int q_{\omega}^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] dr.
\end{aligned}$$

$C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$  – константы интегрирования, которые вычисляются по формулам типа (19)-(21) после формального введения в верхний индекс дополнительных нагрузок звездочки, удаления в  $C_5^{(n)*}$  температуры и замены  $q_0$  на  $2q_0$ .

После этого искомые параметры напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластины на втором полуцикле нагружения следуют из соотношений (23) с учетом решений (16), (28), например

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

Рис.4 иллюстрирует прогиб –  $a$  и относительный сдвиг –  $b$  при циклическом изгибе пластины круговой нагрузкой ( $a = 0,25$ ,  $b = 0,75$ ,  $q_0 = 8$  МПа): 1 – упругая пластина, 2 – изотермическая упругопластичность ( $T_1 = 293$  К), 3 – термоупругопластичность ( $T_2 = 323$  К). Один штрих прямая нагрузка, два штриха – обратная.

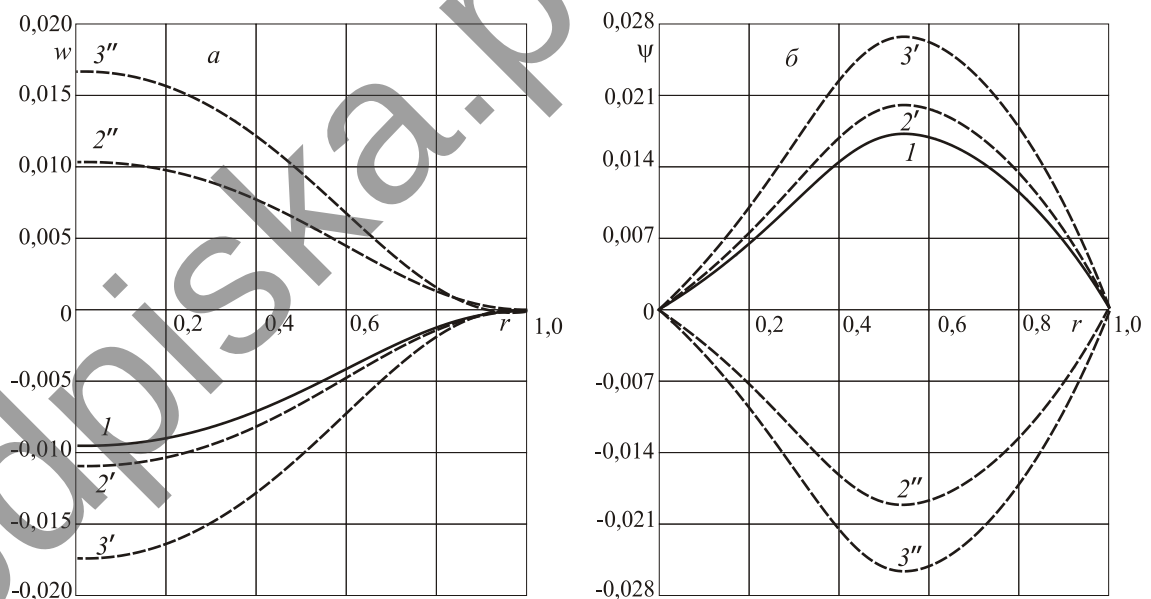


Рис.4. Перемещения в пластине при циклическом термосиловом нагружении.

После перемены знака нагрузки максимальная величина перемещений несколько уменьшилась ( $3''$ ) на 3%, как при «холодной», так и при «горячей» пластичности. Это явление объясняется циклическим упрочнением материалов несущих слоев.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методика и полученное общее решение краевой задачи позволяют исследовать НДС упругопластических трехслойных круговых пластин при прямых и знакопеременных локальных нагрузках в температурном поле.

Численные результаты подтвердили сходимость метода упругих решений, существенное влияние физической нелинейности материалов слоев и температуры на НДС в пластине.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
3. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н. *Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней*. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
4. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. *Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности*. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
5. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. – Academic Press, 2016. – 410 p.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates* // *Composite Structures*. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
7. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
8. Паймушин В.Н. *Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму* // *Прикладная математика и механика*. – 2018. – Т.82. – №1. – С.44-57.
9. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки* // *Прикладная механика*. – 2001. – Т.37. – №9. – С.100-107.
10. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates* // *Aerospace Science and Technology*. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
11. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam* // *Lobachevskii journal of mathematics*. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
12. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells* // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
13. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Яровая А.В. *Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок* // *Проблемы прочности*. – 2002. – Т.34. – №5. – С.70-79.
14. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.

15. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
16. Джагангиров А.А. *Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, заземленной по кромкам* // Механика композитных материалов. – 2016. – Т.52. – №2. – С.385-398.
17. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
18. Belinha J., Dints L.M. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method* // Composite Structures. – 2007. – Vol.78. – No.3. – Pp.337-350.
19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels* // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates* // AIAA Journal. – 2007. – Vol.45. – No.9. – Pp.2312-2322.
21. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates* // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2009. – Vol.12. – No.1. – Pp.7-46.
22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol.17. – No.6. – Pp.419-432.
23. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love-Kirchhoff Model* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol.56. – No.2. – Pp.561-580.
24. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method* // Applied Mathematical Modeling. – 2012. – Vol.36. – No.11. – Pp.5657-5677.
25. Старовойтов Э.И. *Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №5. – С.114-119.
26. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
27. Захарчук Ю.В. *Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем* // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – №10. – С.55-66.
28. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. *Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.58-73.
29. Козел А.Г. *Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – №32. – С.235-240.
30. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.2. – №3. – С.392-406.

31. Нестерович А.В. *Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины* // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – №13. – С.116-121.
32. Старовойтов Э.И., Нестерович А.В. *Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №1. – С.17-30.
33. Москвитин В.В. *Циклическое нагружение элементов конструкций*. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
34. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации*. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

## REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore-London, World Scientific Publ., 2015, 376 p.
3. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Rabinsky L.N. *Deformirovanie trekhslojnykh fizicheski nelinejnykh sterzhnej [Deformation of three-layer physically nonlinear bars]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2016, 184 p.
4. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Continuum mechanics. The theory of elasticity and plasticity]*. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet, 2011, 540 p.
5. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016, 410 p.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
7. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebanij trekhslojnoj plastiny na osnove uravnenij utochnennoj teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
8. Paimushin V.N. *Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.S(1), Pp.76-87.
9. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell*. International applied mechanics, 2001, Vol.37, No.9, Pp.1196-1203.
10. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
11. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky, D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam*. Lobachevskii journal of mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.
12. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145-152.

13. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads*. Strength of Materials, 2002, Vol.34, No.5, Pp.474-481.
14. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhslojnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
15. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniya trekhslojnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.
16. Dzhagangirov A.A. *Load-Carrying Capacity of a Fiber-Reinforced Annular Tree-Layer Composite Plate Clamped on its External and Internal Contours*. Mechanics of composite materials, 2016, Vol.52, No.2, Pp.271-280.
17. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
18. Belinha J., Dints L.M.J.S. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method*. Composite Structures, 2007, Vol.78, No.3, Pp.337-350.
19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels*. Materials Sciences and Applications, 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates*. AIAA Journal, 2007, Vol.45, No.9, Pp.2312-2322.
21. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates*. Journal of Sandwich Structures and Materials, 2009, Vol.12, No1, Pp.7-46.
22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2010, Vol.17, No.6, Pp.419-432.
23. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love–Kirchhoff*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, Vol.56, No.2, Pp.561-580.
24. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higherorder shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method*. Applied Mathematical Modelling, 2012, Vol.36, No.11, Pp.5657-5677.
25. Starovoitov E.I. *Termosilovoe nagruzhenie trekhslojnykh pologikh obolochek [Thermal force loading of three-layer flat shells]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1989, No.5, Pp.114-119.
26. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2017, Vol.23, No.3, Pp.419-434.
27. Zakharchuk Yu.V. *Peremeshheniya v krugovoj trekhslojnoj plastine so szhimaemym zapolnitelem [Movements in a circular three-layer plate with a compressible filler]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovacii, 2017, No.10, Pp.55-66.

28. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. *Izgib uprugoplasticheskoy krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem* [Bending of an elastoplastic circular three-layer plate with a compressible filler]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2020, Vol.26, No.1, Pp.58-73.
29. Kozel A.G. *Deformirovanie krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka* [Deformation of a circular three-layer plate on the Pasternak foundation]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2017, No.32, Pp.235-240.
30. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka* [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, Vol.24, No.3, Pp.392-406.
31. Nesterovich A.V. *Radial'noe i tangentsial'noe neosesimmetrichnoe nagruzhenie krugovoj trekhslojnoj plastiny* [Radial and tangential non-axisymmetric loading of a circular three-layer plate]. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii*, 2020, No.13, Pp.116-121.
32. Starovoitov E.I., Nesterovich A.V. *Neosesimmetrichnoe deformirovanie svobodno opertoj trekhslojnoj plastiny v svoej ploskosti* [Non-axisymmetric deformation of a freely supported three-layer plate in its plane]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2021, Vol.27, No.1, Pp.17-30.
33. Moskvitin V.V. *Tsiklichesкое nagruzhenie ehlementov konstruksij* [Cyclic Loading of Elements of Designs]. Moskva, Nauka, 1981, 344 p.
34. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Chast' 1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Part 1. Elastic-Plastic Deformation]. Moskva, Gostekhizdat, 1948, 376 p.

Поступила в редакцию 18 июля 2022 года.

---

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф. «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)

Леоненко Денис Владимирович – д.ф.-м.н., проф., проф. каф. «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)

Абдусаттаров Абдусамат – д.т.н., проф., проф. каф. «Прикладная механика», Ташкентский государственный транспортный университет, г. Ташкент, Узбекистан; e-mail: [abdusattarov4646@gmail.com](mailto:abdusattarov4646@gmail.com)

УДК 539.4

EDN АТУННН (<https://elibrary.ru/atyhnh>)

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ДОРНИРОВАНИЯ СОЕДИНИТЕЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МУФТЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ МАТЕРИАЛА ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ\*

Шарунов. А.В.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Работа посвящена численному анализу процесса дорнирования цилиндрической муфты из сплава с памятью формы (СПФ) в режиме мартенситной неупругости (МН). Рассмотрение задачи ведется в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Полученное решение учитывает, как упругие деформации, так и свойство разнсопротивляемости материала. Под разнсопротивляемостью понимается зависимость материальных констант этих сплавов от параметра вида напряженного состояния. В качестве параметра вида напряженного состояния используется параметр, связанный с третьим инвариантом девиатора напряжений.

Численное моделирование выполнено в программном комплексе Simulia Abaqus с применением технологии пользовательского материала. Моделирование процесса дорнирования толстостенной цилиндрической муфты реализуется с помощью итерационного метода, в котором на каждом шаге, соответствующему передвижению муфты на заданное расстояние в осевом направлении, сохраняется напряженно-деформированное состояние предыдущего шага. Задача решается в трехмерной постановке с учетом осевой симметрии муфты.

В рамках работы получены эпюры напряжений по сечению муфты для каждого шага соответствующему положению дорна в определенный момент времени. Установлено, что в процессе нагружения, напряжения по сечению меняются немонотонно, а само распределение напряжений имеет нелинейную зависимость от радиуса. Параметр вида напряженного состояния также имеет неоднородное распределение по сечению оболочки. Замечено, что при продвижении дорна вглубь муфты, эпюра осевых напряжений и параметра вида напряженного состояния изменяются по сечению муфты.

Результаты, полученные в ходе выполнения работы, могут быть успешно использованы при проектировании термомеханических соединительных муфт из СПФ.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; мартенситная неупругость; разнсопротивляемость; дорнирование; муфта

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE DORNING PROCESS OF A CONNECTING CYLINDRICAL COUPLING MADE OF AN ALLOY WITH SHAPE MEMORY, TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THE TYPE OF STRESS STATE ON THE BEHAVIOR OF THE MATERIAL

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект №20-01-00240.



Sharunov A.V.

*Moscow aviation institute (national research university), Moscow, Russia*

## ABSTRACT

The work is devoted to the numerical analysis of the dornig process of a cylindrical coupling made of shape memory alloy (SMA) in the mode of martensitic inelasticity (MI). The problem is considered within the framework of the model of nonlinear deformation of the SMA during phase and structural transformations. The resulting solution takes into account both elastic deformations and the property of the material's resistivity. The resistance of the materials is understood as the dependence of the material constants of these alloys on the parameter of the type of stress state. The parameter associated with the third invariant of the stress deviator is used as a parameter of the type of stress state.

Numerical simulation was performed in the Simulia Abaqus software package using the technology of user-generated material. Modeling of the dornig process of a thick-walled cylindrical coupling is implemented using an iterative method in which the stress-strain state of the previous step is preserved at each step corresponding to the movement of the coupling for a given distance in the axial direction. The problem is solved in a three-dimensional formulation taking into account the axial symmetry of the coupling.

As part of the work, stress diagrams were obtained along the coupling cross-section for each step corresponding to the position of the mandrel at a certain time. It is established that in the process of loading, the cross-section stresses change nonmonotonically, and the stress distribution itself has a nonlinear dependence on the radius. The parameter of the type of stress state also has an inhomogeneous distribution over the cross section of the shell. It is noticed that as the mandrel moves deeper into the coupling, the plot of axial stresses and the parameter of the type of stress state change along the section of the coupling.

The results obtained in the course of the work can be successfully used in the design of thermomechanical coupling couplings from SMA.

**Keywords:** shape memory alloys; martensitic transformation; tension-compression asymmetry; dornig, coupling

## ВВЕДЕНИЕ

Для проектирования и активного применения устройств, принцип работы которых основан на использовании уникальных термомеханических свойств СПФ [1], требуется наличие достоверных решений краевых задач механики этих сплавов [2]. Однако, получение подобных аналитических решений затруднено объективной сложностью определяющих соотношений, описывающих термомеханические процессы, протекающие в СПФ.

Помимо этого, расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, содержащих СПФ, осложняется тем фактом, что эти сплавы являются разносопротивляющимися растяжению-сжатию и их соответствующие диаграммы деформирования имеют качественные различия. Данное явление характерно для режимов мартенситной неупругости [3-5], сверхупругости [6-8] и для процесса прямого термоупругого мартенситного превращения [9-13].

Для корректного описания поведения СПФ с учетом их разносопротивляемости требуется определение зависимости материальных констант и функций сплава от параметра вида напряженного состояния, что требует проведения большого объема экспериментальных работ [4-5].

Узкий круг работ посвящен решению задач о термомеханическом поведении элементов конструкций из СПФ с учетом свойства разносопротивляемости.

В работе [14] получены решения задач о НДС тонкостенных конструкций, таких как сфера и цилиндр, из СПФ как в режиме мартенситной неупругости, так и в процессе прямого мартенситного термоупругого превращения на основе моделей [15-18]. Работы [19-22] посвящены задачам о потере устойчивости элементов из СПФ, вызванной обратными термоупругими фазовыми превращениями, при решении которых требуется учет влияния вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ.

В трудах [23,24] получены решения задач о поведении толстостенной цилиндрической оболочки и сферы из СПФ, материал которых претерпевает прямое термоупругое фазовое превращение под действием постоянного внутреннего давления [23] или постоянных внутреннего или внешнего давления и осевой силы [24]. Однако в этих работах нагружение в режиме мартенситной неупругости не рассматривается, эффект разнсопротивляемости СПФ не учитывается.

Одним из способов решения данных краевых задач является использование коммерческих пакетов конечно-элементного моделирования. Так, работы [25,26] посвящены конечно-элементному анализу актуаторов из СПФ. Моделирование выполнено в рамках моделей [27] и [28,29] соответственно.

В работах [30-32] рассматривается численное моделирование процесса деформирования толстостенных сферы и цилиндра из СПФ в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии с учетом разнсопротивляемости этих сплавов. В работе [30] проведена верификация программного модуля, использованного в работах [31,32].

Данная работа посвящена численному моделированию процесса раздачи толстостенной цилиндрической муфты из сплава с памятью формы (СПФ) в режиме мартенситной неупругости (МН). Процесс раздачи происходит путем дорнирования. Приведенное в работе решение учитывает зависимость НДС оболочки от вида напряженного состояния. Используемые при решении определяющие соотношения для СПФ соответствуют распространению на случай учета влияния вида напряженного состояния объединенной модели фазового и структурного деформирования СПФ [33-36], точнее варианта этой модели, учитывающей только изотропное упрочнение для структурного деформирования [33].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрение задачи дорнирования толстостенной цилиндрической муфты из СПФ ведется в трехмерной по пространству постановке с учетом осевой симметрии тела, в цилиндрической системе координат  $r - \theta - z$ . Моделирование данного процесса реализуется с помощью итерационного метода, в котором на каждом шаге, соответствующему передвижению муфты на заданное расстояние, равное 0.5 мм в осевом направлении, сохраняется напряженно-деформированное состояние предыдущего шага. Считается, что в процессе раздачи вся боковая поверхность дорна, вошедшая в муфту, является областью взаимодействия, а коэффициент трения между дорном и муфтой равен нулю. Взаимодействие дорна и муфты моделируется полем перемещений, изменяемым на каждом шаге.

В процессе моделирования использовались кинематические граничные условия учитывающие осевую симметрию тела:

1. Запрет перемещений в окружном направлении по плоским граням параллельным оси муфты.
2. Запрет перемещений в осевом направлении по торцам муфты. Для устранения влияния граничных условий на полученные результаты, закрепление осуществляется по торцу, находящемуся на максимальном отдалении от дорна.

Геометрические характеристики толстостенной цилиндрической муфты взяты на основании данных представленных в [37]:

1. Внешний радиус  $r_1 = 4.38$  мм;
2. Внутренний радиус  $r_2 = 3.11$  мм;
3. Длина муфты  $h = 18$  мм.

Параметры дорна:

1. Цилиндрическая часть: длина  $l_1 = 15$  мм, радиус  $r_3 = 3.17$  мм;
2. Коническая часть: длина  $l_2 = 4$  мм, радиус  $r_4 = 3.11$  мм.

На рис.1.1. приведена конечно-элементная модель (КЭМ) муфты с отмеченными сечениями на которых производились замеры напряжений и перемещений. Муфта смоделирована 3-х мерным типом КЭ C3D8H. Дорн в свою очередь представляет из себя абсолютно твердое тело.

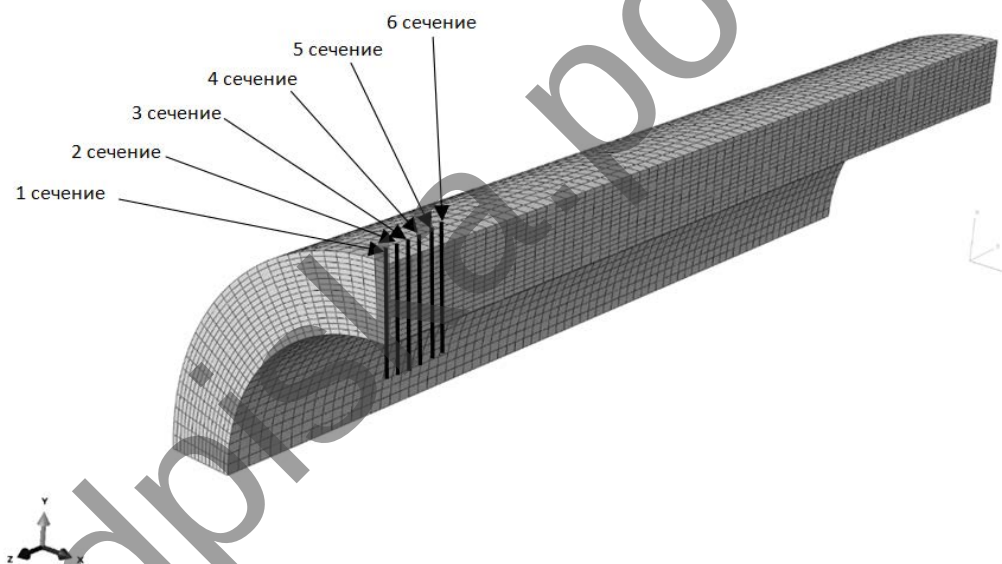


Рис.1.1. КЭМ толстостенной цилиндрической муфты.

В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [15-18] реализованного в программном модуле, предполагается аддитивное представление тензора приращений полных деформаций, при их малости. Для случая изотермического нагружения образца из СПФ в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии полные деформации определяются следующим образом

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{st},$$

где  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $d\varepsilon_{ij}^e$ ,  $d\varepsilon_{ij}^{st}$  – приращения полной, упругой, и структурной деформации соответственно.

Упругие деформации определяются по формуле, приведенной ниже

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{e'} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^e, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G_M}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K_M}.$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^{e'}$ ,  $\varepsilon_{kk}^e \delta_{ij}$  – девиатор и шаровая часть тензора упругих деформаций,  $\sigma_{ij}'$ ,  $\sigma_{kk}$  – девиатор и первый инвариант тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера,  $G_M$ ,  $K_M$  – модуль сдвига и утроенный объемный модуль СПФ в мартенситном фазовом состоянии соответственно.

Приращение структурных деформаций

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_D(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} qF'(\sigma_i) d\sigma_i \quad \text{при} \quad \begin{cases} \sigma_i = \sigma_{i\max} \\ d\sigma_i > 0 \end{cases} \quad \text{иначе} \quad d\varepsilon_{ij}^{st} = 0.$$

Здесь  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\rho_D(\mu_\sigma)$  – предельные значения интенсивности структурной деформации, зависящие от параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$ ;  $F'(\sigma_i)$  – плотность распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме образца из СПФ в мартенситном фазовом состоянии.  $F(\sigma_i)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме поликристаллического СПФ [15].

На основе экспериментальных данных в [3] установлено, что для аппроксимации диаграммы мартенситной неупругости с учетом разнсопротивляемости материала, наилучшим образом подходит  $\gamma$  – гамма распределение, такое, что функция  $F(\sigma_i)$  запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} F(\sigma_i) &= \varphi\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)}, \alpha(\mu_\sigma)\right) = \gamma\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)}, \alpha(\mu_\sigma)\right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha(\mu_\sigma))} \int_0^{\frac{\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)}} t^{\alpha(\mu_\sigma)-1} \exp(-t) dt, \\ F'(\sigma_i) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha(\mu_\sigma))} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)}\right)^{\alpha(\mu_\sigma)-1} \exp\left(-\frac{\sigma_i}{\sigma_0(\mu_\sigma)}\right) \frac{1}{\sigma_0(\mu_\sigma)}. \end{aligned}$$

где  $\alpha(\mu_\sigma)$ ,  $\sigma_0(\mu_\sigma)$  – параметры материала,  $\Gamma$  – гамма функция.

Связь между компонентами приращений девиаторов напряжений и деформаций устанавливается следующим соотношением

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}' &= 2G d\varepsilon_{ij}' - \lambda \sigma_{ij}' \sigma_{kl}' d\varepsilon_{kl}', \\ \lambda &= 9\rho_D(\mu_\sigma) \frac{G_M^2}{\sigma_i^2} \frac{F'(\sigma_i)}{(1 + 3G_M \rho_D(\mu_\sigma) F'(\sigma_i))}. \end{aligned}$$

Здесь  $d\sigma_{ij}'$ ,  $d\varepsilon_{ij}'$  – девиатор приращений напряжений и деформаций.

Шаровая часть тензора приращений напряжений определяется по формуле, приведенной ниже

$$d\sigma_{kk} = K_M d\varepsilon_{kk}.$$

Здесь  $d\varepsilon_{kk}$  – первый инвариант тензора приращений деформаций.

Приращение компонент тензора напряжений вычисляется следующим образом

$$d\sigma_{ij} = \frac{1}{3}d\sigma_{kk}\delta_{ij} + d\sigma'_{ij}.$$

В работе полагается, что параметры материала  $\alpha(\mu_\sigma)$ ,  $\sigma_0(\mu_\sigma)$ ,  $\rho_D(\mu_\sigma)$  линейно зависят от параметра вида напряженного состояния.

В [10] в качестве параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$  используется параметр, связанный со 2-м и 3-м инвариантом девиатора напряжений

$$\mu_\sigma = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_i^3} = \frac{27}{2} \frac{\det(\sigma'_{ij})}{\sigma_i^3}.$$

Здесь  $J_3$  – третий инвариант девиатора напряжений. Параметр  $\mu_\sigma$  может принимать значение от 1 (одноосное растяжение) до -1 (одноосное сжатие). Случай, когда  $\mu_\sigma = 0$  соответствует чистому сдвигу.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При численном моделировании использованы следующие значения материальных констант, для случая  $\mu_\sigma = 1$  (одноосного растяжения):  $\rho_D^t(\mu_\sigma) = 0.0608$ ,  $\sigma_0^t(\mu_\sigma) = 27.4$  МПа,  $\alpha^t(\mu_\sigma) = 6.45$ ; для случая  $\mu_\sigma = -1$  (одноосного сжатия):  $\rho_D^c(\mu_\sigma) = 0.02$ ,  $\sigma_0^c(\mu_\sigma) = 18$  МПа,  $\alpha^c(\mu_\sigma) = 16.08$  [3].

Ниже представлены эпюры радиальных  $\sigma_r$  (рис.2.1а,б) и кольцевых  $\sigma_\theta$  (рис.2.2а,б) напряжений по сечению цилиндрической толстостенной муфты, построенные для различных положений дорна внутри муфты: 1 шаг соответствует прохождению конусной части дорна на 1 см, 4 шаг – 4 см. Нумерация кривых на рис.2.1-2.3 соответствует сечениям, представленным на рис.1.1.  $\xi = r/b$  – безразмерный радиус оболочки.

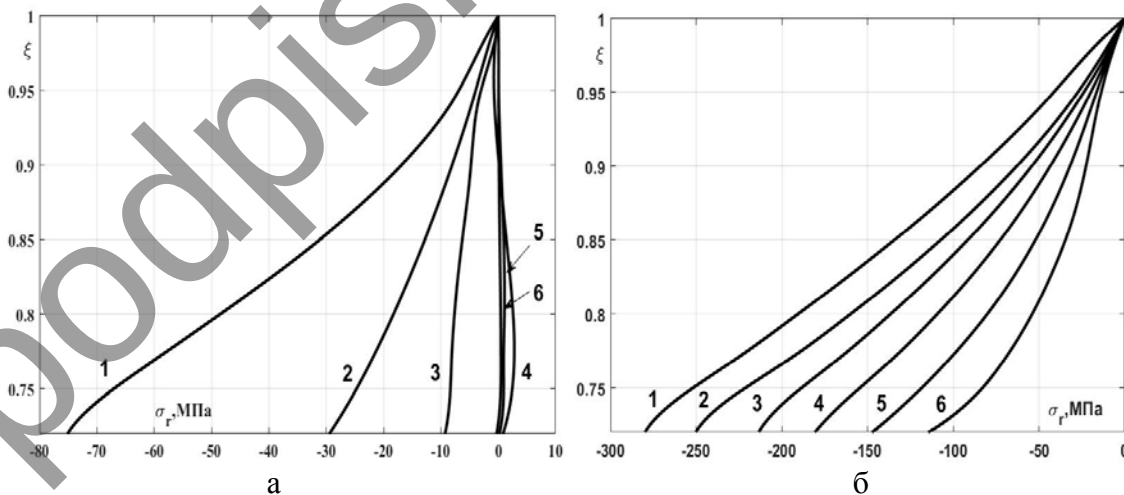


Рис.2.1. а) эпюры  $\sigma_r - \xi$ . 1 шаг; б) эпюры  $\sigma_r - \xi$ . 4 шаг.

На основании рис.2.1а,б можно сделать вывод, что распределение радиальных напряжений  $\sigma_r$  имеет нелинейный характер по сечению муфты и немонотонно изменяется в процессе прохождения дорна вглубь муфты. Следует

заметить, что, при переходе с конусной части дорна на цилиндрическую, рост  $\sigma_r$  прекращается и остается неизменным до окончания процесса.

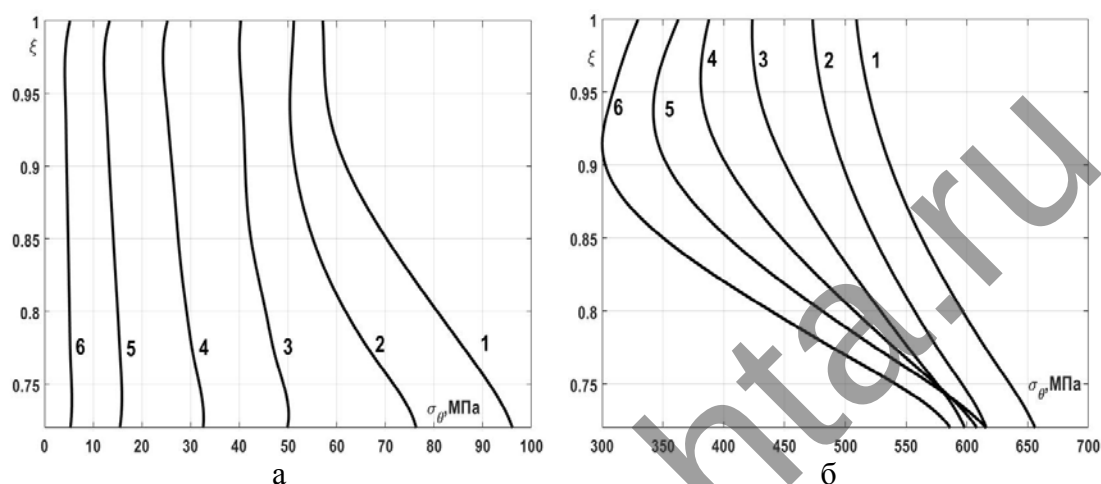


Рис.2.2. а) эпюры  $\sigma_\theta - \xi$  . 1 шаг; б) эпюры  $\sigma_\theta - \xi$  . 4 шаг.

Исходя из приведенных данных, можно заключить, что распределение окружных напряжений  $\sigma_\theta$  по сечению муфты имеет нелинейный характер и немонотонно изменяется в процессе нагружения. Отметим, что при прохождении конусной части дорна вглубь муфты, наблюдается резкий рост  $|\sigma_\theta|$  вблизи внутренней поверхности оболочки, а распределение  $\sigma_\theta$  становится все более нелинейным и неравномерным по сечению муфты (кривые 5-6).

На рис.2.3а,б приведены распределения  $\varepsilon_r$  по сечению цилиндрической толстостенной муфты.

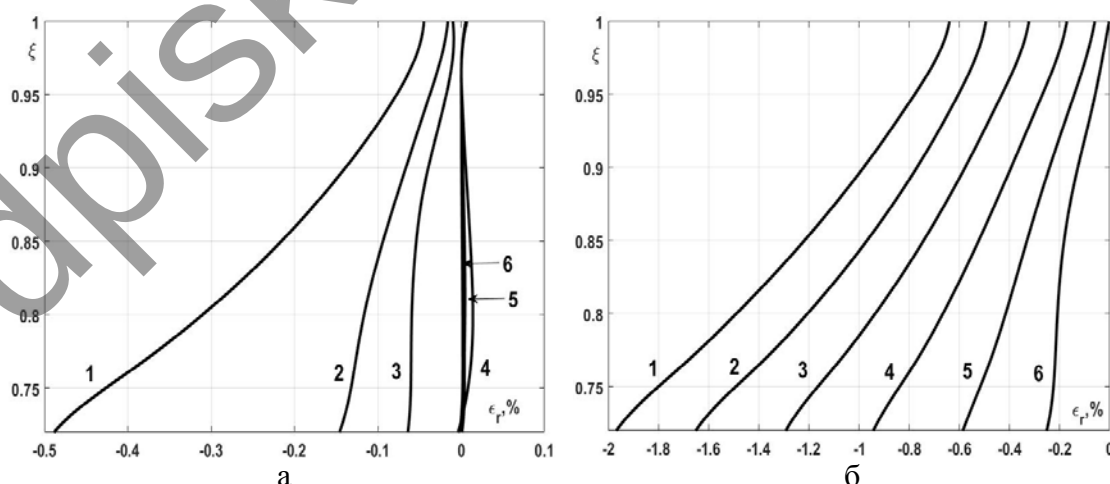


Рис.2.3. а) зависимости  $\varepsilon_r - \xi$  . 1 шаг; б) зависимости  $\varepsilon_r - \xi$  . 4 шаг.

Из рис.2.3а,б видно, что величина максимальной раздачи муфты составляет 2% на внутреннем радиусе и менее 1% на внешнем. Следует отметить, что распределение радиальных деформаций по сечению муфты нелинейно и немонотонно изменяется в процессе раздачи.

На рис.2.4 приведено распределение  $\sigma_z$  по сечению цилиндрической толстостенной муфты. Сплошные линии соответствуют 1 шагу, штриховые – 4 шагу. Кривые 1,2 построены для 2 сечения, 3,4 для 6 сечения.

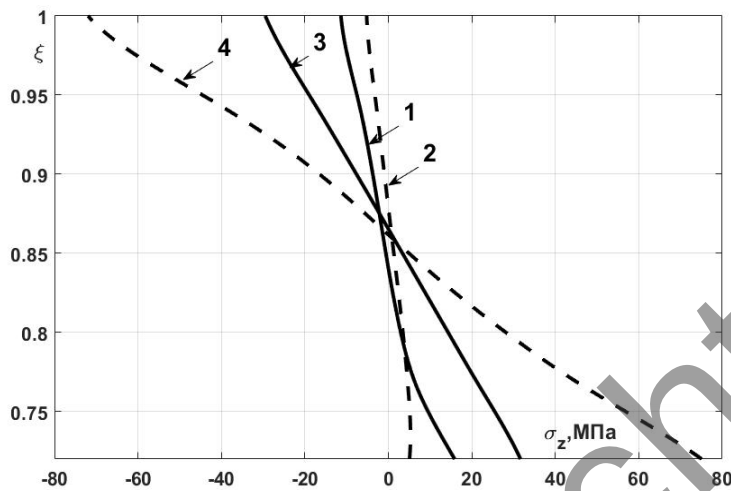


Рис.2.4. Эпюры  $\sigma_z - \xi$ .

Распределение осевых напряжений  $\sigma_z$  имеет нелинейный характер по сечению муфты. Отмечено, что при продвижении дорна вглубь муфты характер распределения напряжений  $\sigma_z$  по радиальной координате стремится к линейному, что характерно для состояния изгиба части муфты типа балки, вырезанной близко расположенными плоскостями  $\theta = const$  с осью, параллельной оси  $z$ .

Ниже, на рис.2.5, приведено распределение параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$  по 1 сечению муфты. Кривая 1 соответствует 1 шагу, 2 – 4 шагу.

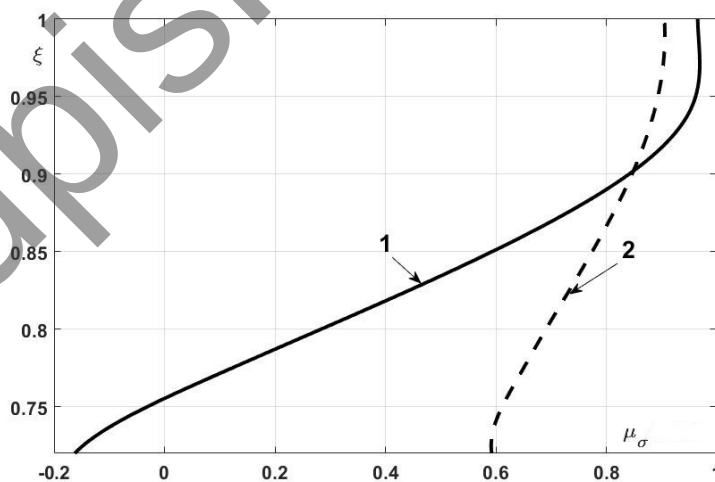


Рис.2.5. Зависимость  $\mu_\sigma - \xi$ .

В ходе работы было установлено, что параметр вида напряженного состояния меняется в процессе нагружения немонотонно, а также имеет нелинейное распределение по сечению оболочки. Как видно из приведенного рисунка, распределение  $\mu_\sigma$  по сечению зависит от положения конусной части дорна внутри муфты. В случае прохождения дорна вглубь муфты на 1 мм,

параметр вида напряженного состояния имеет знакопеременный и нелинейных характер по сечению муфты. При прохождении всей конусной части дорна, параметр вида напряженного состояния перестает быть знакопеременным, но остается нелинейным. Изменения величины  $\mu_\sigma$  в процессе раздачи муфты из СПФ свидетельствуют о том, что нагружение в данном случае является непропорциональным, и к решению данной задачи с учетом разнсопротивляемости этих материалов не может быть применено положение об активных процессах пропорционального нагружения.

## ВЫВОДЫ

В рамках работы выполнено численное моделирование процесса дорнирования толстостенной цилиндрической муфты из СПФ в режиме мартенситной неупругости. Решение получено с учетом разнсопротивляемости этих сплавов растяжению-сжатию.

Установлено, что в процессе раздачи муфты путем дорнирования эпюры напряжений и параметра вида напряженного состояния имеют нелинейный вид. Отмечено, что параметр вида напряженного состояния в процессе раздачи муфты из СПФ перераспределяется и перестает иметь знакопеременный характер. Осевые напряжения по сечению муфты немонотонно возрастают при прохождении дорна. Отмечено, что при продвижении дорна вглубь муфты характер распределения напряжений  $\sigma_z$  по радиальной координате стремиться к линейному, что характерно для состояния изгиба части муфты типа балки, вырезанной близко расположенными плоскостями  $\theta = const$  с осью, параллельной оси  $z$ . Вследствие этого к решению данной задачи нельзя применять положение об активных процессах пропорционального нагружения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 216 с.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. *Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы* // Ученые записки Казанского университета. – 2015. – Т.157. – С.97-110.
3. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
4. Yong Liu, Z. Xie, J. Van Humbeeckd, L. Delaey *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys* // Acta mater. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.83-93.
6. Sehitoglu H., Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys* / IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids. – 2002. – Pp.103-109.



7. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture* // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol.49. – Pp.709-737.
8. Elibol C., Wagner V.F.-X. *Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear* // Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol.643. – Pp.194-202.
9. Ken Gall, Sehitoglu Huseyin, Anderson Rob, Karaman Ibrahim, Chumlyakov Yu.I., Kireeva I.V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.317. – Pp.85-92.
10. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43 – Pp.613-626.
11. Sittner P., Novak V., *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads* // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – No.1. – Pp.48-55.
12. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Выбор аппроксимаций диаграммы прямого превращения никелида титана при растяжении и сжатии* // Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные и технические науки. – 2018. – Т.23. – №123-1. – С.459-463.
13. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression* // Construction and Building Materials. – 2017. – Vol.155 – Pp.348-362.
14. Шарунов А.В. *Решение задачи о нагружении тонкостенных сферы и цилиндра из сплава с памятью формы, с учетом разнсопротивляемости материала в режиме мартенситной неупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №2. – С.174-189.
15. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – №3. – С.118-130.
16. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
17. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонокотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
18. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
19. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – №5. – С.164-178.
20. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим*

- мартенситным превращением // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №1. – С.117-130.
21. Думанский С.А., Мовчан А.А. *Дважды связанная постановка задачи о потере устойчивости, вызванной обратным термоупругим фазовым превращением в сплаве с памятью формы* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – №5. – С.37-48.
22. Думанский С.А., Мовчан А.А. *Потеря устойчивости стержня из сплава с памятью формы, вызванная обратным мартенситным превращением* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2019. – №4. – С.94-108.
23. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
24. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
25. Drahos P., Kutis V., Lenicky R. *SMA actuator with active clamp* // Procedia Engineering – 2012 – Vol.48 – Pp. 90-95.
26. Merzouki T., Duval A., Zineb T. *Finite element analysis of a shape memory alloy actuator for a micropump* // Simulation Modeling Practice and Theory. – 2012. – Vol.27. – Pp.112-126.
27. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12(6). – Pp.805-842.
28. Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Ben-Zineb T. *Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation* // Mechanics of Materials. – 2011. – Vol.43(7). – Pp.361-376.
29. Duval A., Haboussi M., Ben-Zineb T. *Modelling of localization and propagation of phase transformation in superelastic sma by a gradient nonlocal approach* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48(13). – Pp.1879-1893.
30. Саганов Е.Б., Шарунов А.В. *Решение задачи о сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления, с учетом разнсопротивляемости материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.108-121.
31. Саганов Е.Б. *Численное моделирование явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы с учетом их разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.281-294.
32. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.
33. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
34. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.

35. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
36. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
37. Aerofit, Inc APT Laboratory, [электронный ресурс], 1968-2004.URL: [www.aerofit.com](http://www.aerofit.com) (Дата обращения: 06.02.2022).

## REFERENCES

1. Likhachev V.A., Kuz'min S.L., Kamentseva Z.P. *Ehffekt pamyati formy [Shape memory effect]*. Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1987, 216 p.
2. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mashihin A.E., Mishustin I.V., Saganov E.B., Safronov P.A. *Kraevye zadachi mekhaniki dlya splavov s pamyat'yu formy [Boundary-value problems of mechanics of shape memory alloy]*. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta, 2015, Vol.157, Pp.97-110.
3. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Ehksperimental'naya identifikatsiya modeli nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Experimental identification of the model of nonlinear deformation of shape memory alloys during phase and structural transformations]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2018, No.12, Pp.2-11.
4. Yong Liu, Z. Xie, J. Van Humbeeck, L. Delaey *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta mater, 1998, Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
5. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Diagrammy martensitnoj neuprugosti nikelida titana pri rastyazhenii, szhatii i szhatii posle rastyazheniya [Nitinol's martensite inelasticity diagramm for tension, compression and tension after compression]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.1, Pp.83-93.
6. Sehitoglu H., Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys*. IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids, 2002, Pp.103-109.
7. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture*. J. Mech. Phys. Solids, 2001, Vol.49, Pp.709-737.
8. Elibol C., Wagner V.F.-X. *Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear*. Materials Science and Engineering, 2015, Vol.643, Pp.194-202.
9. Gall Ken, Sehitoglu Huseyin, Anderson Rob, Karaman Ibrahim, Chumlyakov Yu.I., Kireeva I.V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.317, Pp.85-92.
10. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.

11. Sittner P., Novak V., *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads*. Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol, 1999, Vol.121, No.1, Pp.48-55.
12. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vybor approksimatsij diagrammy pryamogo prevrashheniya nikelida titana pri rastyazhenii i szhatii [Choice of approximations of direct transformation diagrams of nickel-titanium under tension and compression]*. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki, 2018, Vol.23, No.123-1, Pp.459-463.
13. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression*. Construction and Building Materials, 2017, Vol.155, Pp.348-362.
14. Sharunov A.V. *Reshenie zadachi o nagruzhении tonkostennykh sfery i tsilindra iz splava s pamyat'yu formy, s uchetom raznosoprotivlyaemosti materiala v rezhime martensitnoj neuprugosti [Solution of loading problems on thin-walled spheres and cylinders of shape memory alloy, taking into account stress state influence in the martensitic inelasticity mode]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.2, Pp.174-189.
15. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Mikromekhanicheskaya model' nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
16. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Uchet yavleniya martensitnoj neuprugosti pri obratnom fazovom prevrashhenii v splavakh s pamyat'yu formy [Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
17. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modelirovanie fazovykh i strukturnykh prevrashhenij v splavakh s pamyat'yu formy, proiskhodyashchikh pod dejstviem nemonotonno menyayushchikhsya napryazhenij [Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2014, Vol.49, No.1, Pp. 27-39.
18. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog teorii plasticheskogo techeniya dlya opisaniya deformatsii martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy [Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
19. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *Analiticheskoe reshenie svyaznoj zadachi ob ustojchivosti plastiny iz splava s pamyat'yu formy pri obratnom martensitnom prevrashhenii [Analytical Solution of the Coupled Buckling Problem for a Plate from a Shape Memory Alloy Subjected to Inverse Martensite Transformation]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2004, Vol.39, No.5, Pp.134-148.
20. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *Poterya ustojchivosti krugloj plastiny iz splava s pamyat'yu formy, vyzvannaya obratnym termouprugim martensitnym prevrashcheniem [Buckling of a Circular Plate Made of a Shape Memory Alloy due to a Reverse Thermoelastic Martensite Transformation]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2008, Vol.43, No.1, Pp.100-111.

21. Dumanskii S.A., Movchan A.A. *Dvazhdy svyaznaya postanovka zadachi o potere ustojchivosti, vyzvannoj obratnym termouprugim fazovym prevrashheniem v splave s pamyat'yu formy* [Two-Way Coupled Statement of the Problem of Loss of Stability due to Inverse Thermoelastic Phase Transition in a Shape Memory Alloy]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2017, Vol.52, No.5, Pp.501-510.
22. Dumanskii S.A., Movchan A.A. *Poterya ustojchivosti sterzhnya iz splava s pamyat'yu formy, vyzvannaya obratnym martensitnym prevrashheniem* [Loss of Stability of a Rod from a Shape-Memory Alloy Caused by Reverse Martensitic Transformation]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela*, 2019, Vol.54, No.6, Pp.929-940.
23. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Kraevye zadachi termomekhaniki dlya tsilindra i sfery iz splava s pamyat'yu formy* [Thermomechanical Boundary Problems for a Cylinder and Sphere Made of Shape Memory Alloy]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2017, No.3, Pp.113-128.
24. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Zadacha o pryamom martensitnom prevrashhenii v tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy* [Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela*, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333.
25. Drahos P., Kutis V., Lenicky R. *SMA actuator with active clamp*. *Procedia Engineering*, 2012, Vol.48, Pp.90-95.
26. Merzouki T., Duval A., Zineb T. *Finite element analysis of a shape memory alloy actuator for a micropump*. *Simulation Modeling Practice and Theory*, 2012, Vol.27, Pp.112-126.
27. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy*. *Intern. J. of Plasticity*, 1996, Vol.12(6), Pp.805-842.
28. Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Ben-Zineb T. *Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation*. *Mechanics of Materials*, 2011, Vol.43(7), Pp.361-376.
29. Duval A., Haboussi M., Ben-Zineb T., *Modelling of localization and propagation of phase transformation in superelastic sma by a gradient nonlocal approach*. *Intern. J. of Solids and Structures*, 2011, Vol.48(13), Pp.1879-1893.
30. Saganov E.B., Sharunov. A.V. *Reshenie zadachi o sfere iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhejsya pod dejstviem postoyannogo davleniya, s uchetom raznosoprotivlyaemosti materiala* [Solution of problem on sphere of alloy with memory of shape under action of constant pressure, taking into account divergence of material]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2020, Vol.26, No.1, Pp.108-121.
31. Saganov E.B. *Chislennoe modelirovanie yavleniya martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy s uchetom ikh raznosoprotivlyaemosti* [Numerical modeling of the phenomena of martensite inelasticity in shape memory alloys with account of their tension-compression asymetry]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.25, No.2, Pp.281-294.
32. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti* [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape

- memory taking into account of tension – compression asymmetry*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
33. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
34. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. *Mechanics of Solids*, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
35. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, Vol.2021, No.4, Pp.333-340.
36. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021. Vol.2021. No.10. Pp.1203-1212.
37. Aerofit, Inc APT Laboratory, [электронный ресурс], 1968-2004.URL: [www.aerofit.com](http://www.aerofit.com) (Дата обращения: 06.02.2022).

Поступила в редакцию 20 июля 2022 года.

---

Сведения об авторе:

Шарунов Алексей Валерьевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [aleksej-sharunov@yandex.ru](mailto:aleksej-sharunov@yandex.ru)



## ОЦЕНКА ТЕНЗОРА ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ\*

Мишустин И.В.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Для более полного изучения разнсопротивляемости поликристаллических сплавов с памятью формы (СПФ) без текстуры был использован алгоритм расчета тензора предельной неупругой деформации, накопленной в результате полного прямого фазового перехода под действием постоянного напряжения, по известным данным о геометрии кристаллических ячеек фаз и путях их трансформации. Алгоритм основан на допущении о равномерном распределении ориентаций ячеек аустенитной фазы в представительном объеме материала и заключается в выборе для каждой из этих ориентаций наиболее энергетически выгодного варианта ориентации мартенсита с последующим осреднением соответствующих формоизменений. На примере равноатомного никелида титана изучена зависимость девиатора предельной неупругой деформации прямого фазового перехода от направляющего девиатора внешнего напряжения, связь видов деформированного и напряженного состояния. Показано, что кристаллографические особенности СПФ приводят к его разнсопротивляемости. При описании фазового перехода использовались тензоры малой деформации, конечной деформации Коши-Грина и логарифмической деформации Генки. Помимо осреднения указанных тензоров деформации выбранных вариантов ориентации мартенсита было проведено осреднение тензоров градиентов деформации с последующим вычислением тензоров предельной деформации указанных типов. Альтернативные способы осреднения привели к близким результатам. Вычисленный описанным способом девиатор предельной деформации фазового перехода однозначно связан с направляющим девиатором внешнего напряжения, независимо от его ориентации. Их главные оси совпадают, однако главные значения пропорциональны только при одноосном растяжении или сжатии. Девиатор предельной деформации фазового перехода представляется в виде суммы двух слагаемых, одно из которых пропорционально направляющему девиатору внешнего напряжения, а другое – ортогональному к нему направляющему девиатору. Построены зависимости интенсивностей слагаемых девиатора предельной деформации от параметра вида нагружения.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; поликристаллы; фазовые переходы; многовариантность; разнсопротивляемость; оценка

## ESTIMATION OF THE LIMIT STRAIN TENSOR OF A POLYCRYSTALLINE SHAPE MEMORY ALLOY

Mishustin Ilya V.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

\*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (тема гос.регистрации 121112200126-5) и при частичном финансовом содействии РФФИ (грант №20-20-01-00240).

## ABSTRACT

For a more complete study of the resistance asymmetry of polycrystalline shape memory alloys (SMAs) without texture, an algorithm for calculating the tensor of limit inelastic strain accumulated in the process of a complete direct phase transition under the action of a constant stress, was used. Known data on the geometry of the crystal cells of the phases and the ways of their transformation are used in the calculation. The algorithm is based on the assumption of a uniform distribution of orientations of the austenite phase cells in a representative volume of the material and consists in choosing for each of these orientations the most energy efficient variant of martensite orientation with subsequent averaging of the corresponding shape changes. Using equiatomic titanium nickelide as an example, the dependence of the limit inelastic strain deviator on the directing deviator of external stress and the relationship between strain and stress states were studied. It is shown that the crystallographic features of the SMA lead to its resistance asymmetry. When describing the phase transition, small strain tensor, Cauchy-Green finite strain tensor, and Hencky logarithmic strain tensor were used. In addition to averaging the specified strain tensors of the selected variants of martensite orientation, the deformation gradient tensors were averaged, followed by the calculation of the limit strain tensors of the specified types. Alternative methods of averaging led to close results. The deviator of the limit strain of the phase transition calculated by the described method is uniquely associated with the directing deviator of the external stress, regardless of its orientation. Their principal axes coincide, but the principal values are proportional only in uniaxial tension or compression. The limit phase transition strain deviator is represented as the sum of two terms, one of which is proportional to the directing deviator of the external stress, and the other term is proportional to the directing deviator, orthogonal to the first one. The dependence curves of the intensities of the limit strain deviator terms on the loading type parameter are plotted.

**Keywords:** shape memory alloy; polycrystal; phase transition; multivariance; resistance asymmetry; estimation

## ВВЕДЕНИЕ

Свойство разнсопротивляемости поликристаллических сплавов с памятью формы (СПФ) без текстуры заключается в зависимости их механического поведения от вида напряженного состояния. При этом они являются изотропными материалами. Одним из проявлений разнсопротивляемости является различие диаграмм монотонного нагружения в аустенитном и мартенситном состояниях (в режимах сверхупругости и мартенситной неупругости), а также зависимостей неупругой деформации, накопленной в результате полного прямого фазового перехода, от действующего при этом постоянного напряжения, выраженных в переменных интенсивность напряжений – интенсивность деформаций. Для разных видов напряженного состояния указанные кривые могут существенно отличаться как по форме, так и по абсолютным значениям.

Одной из причин такого поведения СПФ являются кристаллографические особенности происходящих в этих материалах термоупругих фазовых превращений, в частности многовариантность перехода из аустенитной фазы с высокосимметричной кристаллической решеткой в мартенситную фазу с менее симметричной ячейкой. Выбор варианта перехода аустенитной решетки определенной ориентации зависит от вида напряженного состояния, что приводит к зависимости от вида напряженного состояния осредненной деформации фазового перехода. Локальное напряжение можно считать равным внешнему при достаточно большой величине интенсивности последнего.



В работе [1] описан алгоритм расчета оценочных значений максимальной по модулю осевой деформации СПФ, накопленной в результате полного прямого фазового перехода под действием одноосного растяжения и одноосного сжатия, на основании данных о геометрии кристаллических ячеек фаз и путях их преобразования. Алгоритм заключается в выборе варианта фазового перехода, при котором внешние напряжения совершают максимальную работу, для каждой из ориентаций аустенитной решетки, равномерно распределенных в представительном объеме СПФ, с последующим осреднением связанных с этими переходами деформаций. Для СПФ разных составов и типов фазовых переходов получена оценка разносопротивляемости при одноосных растяжении и сжатии.

В модели нелинейного деформирования СПФ [2,3] собственная деформация группы зародившихся мартенситных образований (мартенситного элемента), отсчитываемая от аустенитного состояния, выражается как сумма

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}'_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad \tilde{\varepsilon}'_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{lim}}(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i), \quad \varepsilon_{ij}^{\text{lim}} = \frac{3}{2} \rho(\mu_\sigma) \sigma_{ij}^0 \quad (1)$$

девиаторной и шаровой частей, первая из которых является произведением материальной функции  $\varphi_1$ , которая монотонная возрастает от 0 до 1 с ростом интенсивности напряжения  $\sigma_i$  и характеризует случайное распределение микронапряжений в представительном объеме, на девиатор предельной фазово-структурной деформации  $\varepsilon_{ij}^{\text{lim}}$ . Предполагается, что последний пропорционален направляющему девиатору действующего в момент зарождения напряжения  $\sigma_{ij}^0 = \sigma'_{ij} / \sigma_i$ , а интенсивность предельной фазово-структурной деформации  $\rho$  зависит от параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$ . Шаровая часть тензора (1) является произведением единичного тензора ( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера) на постоянную для рассматриваемого материала линейную деформацию объемного эффекта прямого фазового перехода  $\varepsilon_0$ .

В процессе прямого фазового перехода путем охлаждения под действием постоянного напряжения собственные деформации всех мартенситных элементов одинаковые и неизменные. В результате полного прямого перехода неупругая деформация представительного объема будет равна той же величине (1), а ее интенсивность связана с интенсивностью напряжения соотношением

$$\varepsilon_i = \rho(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i).$$

Предельное значение  $\rho$  является асимптотическим на соответствующей экспериментальной кривой. При ее построении помимо упругих нужно исключить пластические деформации, что представляет определенные трудности и может привести к значительной погрешности. С другой стороны, величина  $\rho$  коррелирует с теоретической оценкой, рассчитанной по описанному выше алгоритму, но не равна ей ввиду наличия границ зерен, дефектов кристаллической решетки и других несовершенств в реальном материале. Теоретическая оценка служит для установления характера зависимости  $\rho(\mu_\sigma)$ .

В других известных моделях деформирования СПФ [4-6] также предполагается пропорциональность девиаторов напряжения и фазово-структурной деформации, аналогичная формуле (1). Однако ряд экспериментов с нагружением, отличным от одноосного растяжения и сжатия, свидетельствует

о нарушении этого допущения, причем отклонение не сводится к эффектам второго порядка, подобным эффекту Пойнтинга в случае кручения тонкостенного цилиндра. В работе [7] описано испытание тонкостенного цилиндрического образца из поликристаллического сплава Ti-51.0 at %Ni при постоянной температуре в режимах сверхупругости и мартенситной неупругости R-фазы путем пропорционального осевого растяжения-сжатия и закручивания. Для определения деформированного состояния измерялись линейные деформации в осевом и окружном направлениях, а также соответствующая деформация сдвига. Результаты демонстрируют различие напряженного и деформированного состояний, особенно при сложном нагружении. Экспериментальные данные по исследованию аналогичных образцов из сплава Cu-12%Al-4%Mn при термоциклировании под напряжением через интервал температур фазовых переходов приведены в [8], где также наблюдается несовпадение типов напряженного и деформированного состояний в случае сложного нагружения. Поэтому представляется важным получить теоретическую оценку тензора предельной фазово-структурной деформации СПФ и установить его связь с направляющим девиатором напряжений.

### 1. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТЕНЗОРА ПРЕДЕЛЬНОЙ ФАЗОВО-СТРУКТУРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Закон движения материальных точек при фазовом переходе в декартовой системе координат, связанной с мартенситной кристаллической решеткой, оси которой обозначим M1, M2, M3, описывается функциями  $y_k(x_k)$ , где  $x_k$  и  $y_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) – координаты материальных точек до и после фазового перехода. Компоненты тензора конечных деформаций Коши-Грина  $\mathbf{E}^{KG}$  выражаются в виде ( $u_k = y_k - x_k$  – смещения точек) [9]

$$2\varepsilon_{Mij}^{KG} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Тензор логарифмических деформаций Генки  $\mathbf{E}^H$  имеет общие с тензором Коши-Грина главные оси, его главные значения равны [10]

$$2\varepsilon_k^H = \ln(2\varepsilon_k^{KG} + 1), \quad (3)$$

а компоненты вычисляются по главным значениям с помощью матрицы поворота при переходе к главным осям. Для компонент тензора малых деформаций  $\mathbf{E}^L$  последнее слагаемое во втором выражении (2) равно нулю. В матричном виде эти тензоры записываются через тензор градиентов деформации  $\mathbf{F}$  с компонентами  $f_{Mij} = \partial y_i / \partial x_j$  и единичную матрицу  $\mathbf{I}$  (верхним индексом T обозначено транспонирование)

$$\mathbf{E}^{KG} = 0.5(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{E}^L = 0.5(\mathbf{F}^T + \mathbf{F}) - \mathbf{I}. \quad (4)$$

Тензоры деформаций и градиентов деформаций всех возможных вариантов мартенситной решетки имеют одинаковые главные значения и шаровую часть, но разные направления главных осей. К одной системе координат, связанной с мартенситной кристаллической решеткой, могут относиться несколько ее вариантов, отличающиеся наклонами ребер (два варианта в случае моноклинной решетки). Значения компонент тензора деформации в декартовой

системе координат, связанной с аустенитной кристаллической решеткой, вычисляются как компоненты матрицы  $E_A$  по формуле

$$E_A = A_0^T \cdot E_M \cdot A_0, \quad (5)$$

где  $E_M$  – матрица, состоящая из компонент (2) того же тензора,  $A_0$  – матрица поворота координатных осей (косинусов углов между осями координат мартенсита и аустенита). Для аустенитной решетки определенной ориентации будем иметь  $mn$  вариантов матрицы  $E_A$ , где  $m$  – число вариантов матрицы  $E_M$ ,  $n$  – число вариантов ориентации осей мартенситной решетки, т.е. матрицы  $A_0$ .

Направление осей A1, A2, A3 системы координат, связанной с аустенитной решеткой, относительно отсчетной системы координат с осями 1, 2, 3 задается тремя углами последовательных поворотов при переходе от отсчетной к аустенитной системе координат. Будем считать, что этот переход осуществляется путем поворота системы координат вокруг оси 3 против часовой стрелки на угол  $\varphi_1$ , затем вокруг оси 2\* (в которую перешла ось 2) на угол  $\varphi_2$ , и наконец, вокруг оси A1 (в которую переходит ось 1 после двух поворотов) на угол  $\varphi_3$ . Соответствующие матрицы поворота равны

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда компоненты тензора деформации в отсчетной системе координат совпадают с компонентами матрицы

$$E = A^T \cdot E_A \cdot A, \quad A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3,$$

где матрица  $E_A$  вычисляется по формуле (5).

Как видно, углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  однозначно задают направление оси A1 при изменении в диапазонах  $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Однако равномерное разбиение этих диапазонов не приводит к выбору равновероятных направлений оси A1 в пространстве (что в результате дальнейшего осреднения деформаций приводит к результатам, противоречащим изотропности материала). В этом можно убедиться, обратившись к геодезической аналогии, ввиду того, что углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  аналогичны долготе и широте. Набор их значений с шагами  $\Delta \varphi_1$  и  $\Delta \varphi_2$  задает на поверхности сферы радиуса  $R$  сетку меридианов и параллелей, которые при пересечении образуют сферические трапеции. Площадь трапеции, ограниченной меридианами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_1 + \Delta \varphi_1$  и параллелями  $\varphi_2$ ,  $\varphi_2 + \Delta \varphi_2$ , равна

$$S = R^2 \Delta \varphi_1 [\sin(\varphi_2 + \Delta \varphi_2) - \sin \varphi_2] = R^2 \Omega,$$

то есть сама эта площадь и соответствующий телесный угол  $\Omega$  уменьшаются при приближении к полюсам. Чтобы все пространство было разбито на одинаковые телесные углы, нужно выбрать такой ряд значений угла  $\varphi_2$ , чтобы  $\sin \varphi_2$  менялся с постоянным шагом. Таким образом, равновероятные ориентации аустенитной решетки задаются путем равномерного разбиения диапазонов

$$\varphi_1 \in [0, 2\pi], \quad \sin \varphi_2 \in [-1, 1], \quad \varphi_3 \in [0, 2\pi].$$

Так как кристаллическая решетка аустенита обладает высокой степенью симметрии, эти диапазоны могут быть сокращены.

Итак, алгоритм расчета предполагает задание ряда равновероятных ориентаций аустенитной решетки, для каждой из таких ориентаций выбор наиболее энергетически выгодного варианта мартенситной решетки из всех возможных и далее осреднение тензоров деформации выбранных вариантов или осреднение их тензоров градиентов деформации с итоговым пересчетом по формулам (4) и (3). Энергетическая ценность определяется по критерию максимальной работы внешних напряжений на деформациях фазового перехода, показателем которой является свертка сопряженных тензоров напряжений и деформаций [11]: тензора напряжений Коши  $\Sigma$  с тензором малых деформаций  $E^L$  (tr – след матрицы или первый инвариант)

$$\Sigma : E^L = \text{tr}(\Sigma \cdot E^{LT})$$

либо второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа  $\Sigma^{PK2}$  с тензором конечных деформаций Коши-Грина  $E^{KG}$ , либо первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа  $\Sigma^{PK1}$  с тензором градиентов деформации  $F$

$$\Sigma^{PK1} = \det(F) \Sigma \cdot (F^T)^{-1}, \quad \Sigma^{PK2} = F^{-1} \cdot \Sigma^{PK1}.$$

Если наиболее выгодных вариантов мартенситной решетки больше одного, то берется среднее арифметическое соответствующих тензоров деформаций или градиентов деформаций.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДЛЯ РАВНОАТОМНОГО TiNi

В качестве примера СПФ рассмотрим никелид титана равноатомного состава. Его аустенитная фаза имеет ОЦК решетку B2, которая переходит в мартенситную моноклинную решетку B19'. Упрощенная схема перехода, приведенная в [12], показана на рис.1 (более сложная описана в [13]).

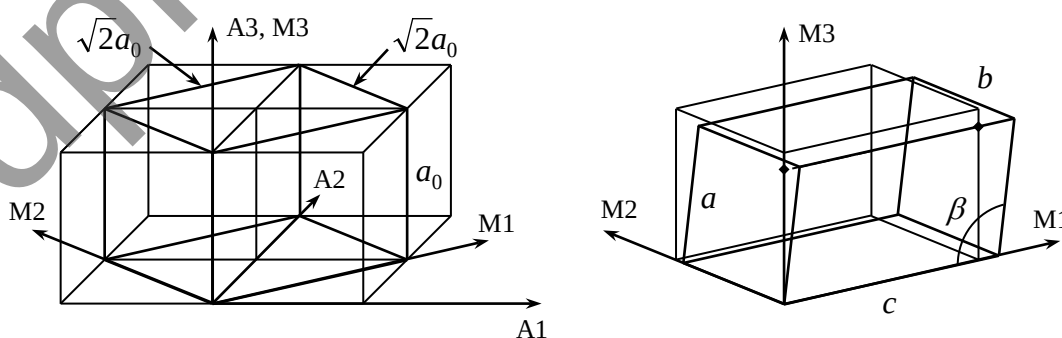


Рис.1. Схема фазового перехода B2 → B19'.

Согласно этой схеме прямоугольный параллелепипед, образованный из половин четырех ОЦК ячеек, имеющих общее ребро, переходит в наклонный параллелепипед с прямоугольным основанием и измененными длинами ребер (сдвиг происходит в плоскости M1M3, ромбами отмечены точки пересечения линий). Длины ребер и угол наклона согласно [14] равны

$$a_0 = 0.3015 \text{ нм}, \quad \sqrt{2}a_0 = 0.4264 \text{ нм},$$

$$a = 0.2889 \text{ нм}, \quad b = 0.412 \text{ нм}, \quad c = 0.4622 \text{ нм}, \quad \beta = 96.8^\circ.$$

В привязке к мартенситной решетке имеем по два тензора деформаций и градиентов деформаций с ненулевыми компонентами в осях M1, M2, M3

$$f_{M11} = \lambda c/a_0, \quad f_{M22} = \lambda b/a_0, \quad \lambda = 1/\sqrt{2},$$

$$f_{M33} = (a/a_0) \cos \bar{\beta}, \quad f_{M13} = f_{M31} = (a/a_0) \sin \bar{\beta},$$

$$\varepsilon_{M11}^L = \lambda c/a_0 - 1, \quad \varepsilon_{M22}^L = \lambda b/a_0 - 1,$$

$$\varepsilon_{M33}^L = (a/a_0) \cos \bar{\beta} - 1, \quad \varepsilon_{M13}^L = \varepsilon_{M31}^L = 0.5(a/a_0) \sin \bar{\beta},$$

$$\varepsilon_{M11}^{KG} = 0.5 \left[ 0.5(c/a_0)^2 - 1 \right], \quad \varepsilon_{M22}^{KG} = 0.5 \left[ 0.5(b/a_0)^2 - 1 \right],$$

$$\varepsilon_{M33}^{KG} = 0.5 \left[ (a/a_0)^2 - 1 \right], \quad \varepsilon_{M13}^{KG} = \varepsilon_{M31}^{KG} = 0.5 \lambda (ac/a_0^2) \sin \bar{\beta},$$

отличающиеся за счет знака угла сдвига  $\bar{\beta} = \pm(\beta - \pi/2)$ . Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{A}_0$  может иметь 6 вариантов

$$\mathbf{A}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итого при фазовом переходе из аустенитной решетки определенного направления могут сформироваться 12 вариантов мартенситной решетки. Нужно выбрать тот (или те), при формировании которого заданные внешние напряжения совершают максимальную работу.

Девиаторы предельной фазово-структурной деформации, рассчитанные по описанному выше алгоритму в случаях одноосного растяжения и сжатия, приведены в Таблице 1. В первой строке находится параметр вида заданного напряженного состояния  $\mu_\sigma = 27 \det(\Sigma') / (2\sigma_i^3)$ , во второй – направляющий девиатор напряжений, ниже – полученный девиатор тензора малых деформаций, интенсивность деформаций и параметр вида деформированного состояния  $\mu_\varepsilon = 4 \det(\mathbf{E}'^L) / \varepsilon_i^3$ . Как видно, в этих случаях нагружения девиатор  $\mathbf{E}'^L$  пропорционален  $\Sigma'$ , виды деформированного и напряженного состояний совпадают. В двух нижних строках таблицы приведены девиаторные части тензоров конечных деформаций Коши-Грина и тензора логарифмических деформаций Генки, которые тоже пропорциональны  $\Sigma'$ . Интенсивности предельной деформации при растяжении и сжатии отличаются примерно в полтора раза, что демонстрирует разносопротивляемость материала.

В Таблице 2 приведены аналогичные данные для случая действия сдвиговой нагрузки в различных плоскостях.

Таблица 1.

Результаты расчета при растяжении и сжатии.

| $\mu_\sigma$      | 1                                                                                    | -1                                                                                  |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Sigma'$         | $\begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3333 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$ |
| $E'^L$            | $\begin{bmatrix} 0.0847 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0424 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0424 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.0603 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0302 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0302 \end{bmatrix}$ |
| $\varepsilon_i$   | 0.0847                                                                               | 0.0603                                                                              |
| $\mu_\varepsilon$ | 1                                                                                    | -1                                                                                  |
| $E'^{KG}$         | $\begin{bmatrix} 0.0861 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0431 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0431 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.0610 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0305 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0305 \end{bmatrix}$ |
| $E'^H$            | $\begin{bmatrix} 0.0820 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0410 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0410 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.0597 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0299 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0299 \end{bmatrix}$ |

Таблица 2.

Результаты расчета при сдвиге.

| $\mu_\sigma$      | 0                                                                                    | 0                                                                                             |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Sigma'$         | $\begin{bmatrix} 0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5774 \end{bmatrix}$       | $\begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$                 |
| $E'^L$            | $\begin{bmatrix} 0.0808 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0263 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0545 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.0131 & 0.0677 & 0 \\ 0.0677 & 0.0131 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0263 \end{bmatrix}$ |
| $\varepsilon_i$   | 0.0825                                                                               | 0.0824                                                                                        |
| $\mu_\varepsilon$ | 0.8269                                                                               | 0.8264                                                                                        |
| $E'^{KG}$         | $\begin{bmatrix} 0.0823 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0273 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0550 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.0136 & 0.0687 & 0 \\ 0.0687 & 0.0136 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0273 \end{bmatrix}$ |
| $E'^H$            | $\begin{bmatrix} 0.0780 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0242 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0538 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.0121 & 0.0659 & 0 \\ 0.0659 & 0.0121 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0242 \end{bmatrix}$ |

Здесь уже тензоры деформаций не пропорциональны направляющему девиатору напряжений. Это свойство не зависит от плоскости сдвига, также как интенсивность предельных деформаций и значение параметра вида деформированного состояния (разница получилась в последнем знаке из-за вычислительной погрешности). Вид деформированного состояния близок к растяжению, причем дополнительные к пропорциональным компоненты тензора деформации сопоставимы с ними по абсолютной величине. Аналогичный эффект наблюдается при сложном нагружении.

Альтернативные расчеты тензоров предельных деформаций через осредненные тензоры градиентов деформации приводят к близким результатам. Различия значений компонент тензоров сравнимы с вычислительной ошибкой.

Вычисленный описанным способом девиатор предельной кристаллографической деформации фазового перехода  $\varepsilon_{ij}^C$  однозначно связан с направляющим девиатором внешнего напряжения  $\sigma_{ij}^0$ . Расчеты показывают, что главные оси этих девиаторов совпадают, однако главные значения пропорциональны только при одноосном растяжении или сжатии. Для описания общей зависимости используем выражение

$$\varepsilon_{ij}^C(\sigma_{ij}^0) = \frac{3}{2}\rho_1(\mu_\sigma)\sigma_{ij}^0 + \frac{3}{2}\rho_2(\mu_\sigma)\sigma_{ij}^X, \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}^X$  – направляющий девиатор, ортогональный  $\sigma_{ij}^0$  (их свертка равна нулю) и имеющий те же главные оси. Компоненты  $\sigma_{ij}^0$  и  $\sigma_{ij}^X$  в главных осях связаны соотношениями

$$\begin{aligned} (\sigma_1^0)^2 + (\sigma_2^0)^2 + \sigma_1^0\sigma_2^0 &= \frac{1}{3}, \quad \sigma_3^0 = -\sigma_1^0 - \sigma_2^0, \quad \sigma_3^X = -\sigma_1^X - \sigma_2^X, \\ (\sigma_1^X)^2 + (\sigma_2^X)^2 + \sigma_1^X\sigma_2^X &= \frac{1}{3}, \quad (2\sigma_1^0 + \sigma_2^0)\sigma_1^X + (\sigma_1^0 + 2\sigma_2^0)\sigma_2^X = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из последних двух равенств можно найти  $\sigma_1^X$  и  $\sigma_2^X$  с точностью до знака

$$\sigma_1^X = \frac{\delta_0}{\sqrt{3}}(\sigma_1^0 + 2\sigma_2^0), \quad \sigma_2^X = \frac{-\delta_0}{\sqrt{3}}(2\sigma_1^0 + \sigma_2^0). \quad (8)$$

Значение переключателя  $\delta_0$  (1 или -1) будет установлено далее.

Согласно выражению (6) компоненты девиатора  $\varepsilon_{ij}^C$  в главных осях связаны с компонентами введенных направляющих девиаторов соотношениями

$$\varepsilon_1^C = \frac{3}{2}(\rho_1\sigma_1^0 + \rho_2\sigma_1^X), \quad \varepsilon_2^C = \frac{3}{2}(\rho_1\sigma_2^0 + \rho_2\sigma_2^X), \quad \varepsilon_3^C = -\varepsilon_1^C - \varepsilon_2^C$$

откуда с учетом (8) и первого равенства (7) получим

$$\rho_1 = \varepsilon_1^C(2\sigma_1^0 + \sigma_2^0) + \varepsilon_2^C(\sigma_1^0 + 2\sigma_2^0), \quad \rho_2 = \delta_0\sqrt{3}(\varepsilon_1^C\sigma_2^0 - \varepsilon_2^C\sigma_1^0), \quad (9)$$

то есть разложение (6) однозначное. Компоненты  $\sigma_1^0$  и  $\sigma_2^0$  связаны первым соотношением (7) и выражаются через третий инвариант девиатора  $\sigma_{ij}^0$  или пропорциональный ему параметр вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$ . Из расчетов  $\varepsilon_{ij}^C$  следует, что  $\rho_1 > 0$  при любом нагружении, а  $\rho_2 = 0$  для нагружения типа одноосного растяжения или сжатия и  $\rho_2 > 0$  при ином нагружении, если третий инвариант девиатора  $\sigma_{ij}^X$  отрицательный. В частности, при сдвиговом нагружении

(см. Таблицу 2)  $\sigma_{ij}^x$  описывает сжатие в поперечном к плоскости сдвига направлении. Условие  $\det \sigma_{ij}^x < 0$  с учетом (7), (8) выполняется при

$$\delta_0 = \text{sign} \left[ (9\sigma_1^0\sigma_2^0 + 2)(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) \right]. \quad (10)$$

Аргумент  $\text{sign}$  равен нулю при нагружениях типа одноосного растяжения или сжатия. Тогда значение  $\delta_0$  не важно, так как согласно расчетам девиаторы  $\varepsilon_{ij}^c$  и  $\sigma_{ij}^0$  пропорциональны, а  $\rho_2 = 0$  по второй формуле (9).

На рис.2 приведены зависимости интенсивности  $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$  девиатора предельной кристаллографической деформации и вычисленных по формулам (9), (10) интенсивностей  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  его слагаемых в выражении (6) от параметра вида нагружения  $\mu_\sigma$  для равноатомного TiNi при осреднении тензоров малых деформаций. Как видно, это величины одного порядка.  $\rho_1$  растет монотонно с увеличением  $\mu_\sigma$ .  $\rho_2$  имеет максимальное значение при  $\mu_\sigma = -0.9$ .  $\rho$  меняется медленно, почти линейно в диапазоне  $-0.4 \leq \mu_\sigma \leq 1$  и резко уменьшается при приближении нагружения к одноосному сжатию  $\mu_\sigma = -1$ .

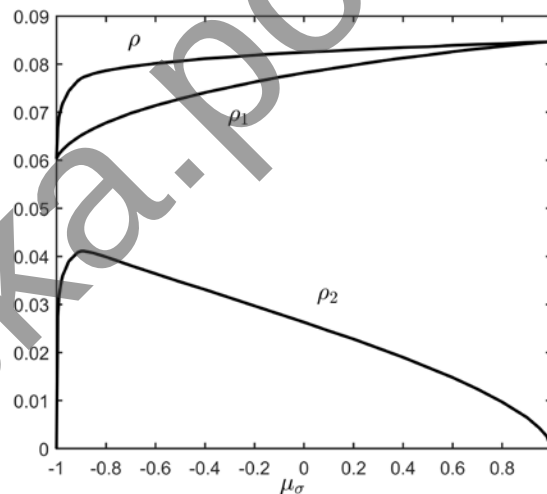


Рис.2. Зависимость  $\rho$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  от параметра вида нагружения  $\mu_\sigma$ .

На рис.3 показана зависимость параметра вида предельного деформированного состояния при фазовом переходе  $\mu_\varepsilon$  от параметра вида нагружения  $\mu_\sigma$ , полученная в результате того же расчета. Можно сделать вывод, что предельное деформированное и напряженное состояния сплава сильно отличаются, кроме состояний, близких к одноосному растяжению или сжатию. Поэтому в модели деформирования СПФ следует предположить, что девиатор предельной фазово-структурной деформации  $\varepsilon_{ij}^{\text{lim}}$  связан с  $\sigma_{ij}^0$  не как в последнем равенстве (1), а подобно выражению (6).



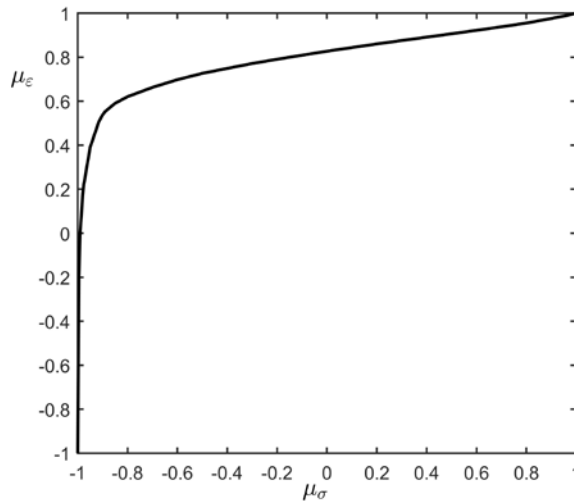


Рис.3. Зависимость параметра вида предельного деформированного состояния  $\mu_\varepsilon$  от параметра вида нагружения  $\mu_\sigma$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описан алгоритм расчета тензора предельной неупругой деформации поликристаллического СПФ без текстуры, накопленной в результате прямого фазового перехода. Этот алгоритм предполагает задание ряда равновероятных ориентаций аустенитной решетки, для каждой из таких ориентаций выбор наиболее энергетически выгодного варианта мартенситной решетки из всех возможных и далее осреднение тензоров деформации выбранных вариантов. Энергетическая ценность определяется по критерию максимальной работы внешних напряжений на деформации фазового перехода. Для равноатомного никелида титана выполнен расчет тензоров предельных деформаций – малых деформаций, конечных деформаций Коши-Грина и логарифмических деформаций Генки при различных видах нагружения. Изучена зависимость тензора предельной неупругой деформации прямого фазового перехода от направляющего девиатора внешнего напряжения, связь видов деформированного и напряженного состояния. Предложено новое выражение собственной деформации группы зародившихся мартенситных образований с дополнительным слагаемым, пропорциональным направляющему девиатору, ортогональному к направляющему девиатору внешних напряжений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Movchan A.A., Mishustin I.V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry* // Nanoscience and Technology. – 2019. – Vol.10. – No.3. – Pp.233-245.
2. Мишустин И.В. *Модель деформирования сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №4. – С.484-498.
3. Mishustin, I.V. *Nanostructural Model of Shape Memory Alloy with Resistance Asymmetry Behavior* // Nanoscience and Technology. – 2018. – Vol.9. – No.2. – Pp.165-181.

4. Lexcellent C. *Shape-memory alloys handbook*. – London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013. – 379 p.
5. Lagoudas D.C. (Ed.). *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. – Springer, 2008. – 436 p.
6. Ziolkowski A. *Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys: Theory and Experimental Studies*. – Elsevier, 2015. – 246 p.
7. Raniecki B., Dietrich L., Kowalewski Z., Socha G., Miyazaki S., Tanaka K., Ziolkowski A. *Experimental methodology for TiNi shape memory alloy testing under complex stress state* // Archives of Mechanics. – 1999. – Vol.51. – No.6. – Pp.727-744.
8. Малинин В.Г., Малинина Н.А., Малинин Г.В., Перелыгин А.И. *Исследование влияние вида напряженного состояния на эффект памяти формы методами структурно-аналитической мезомеханики* // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологий. – 2012. – №2(292). – С.3-9.
9. Грин А., Адкинс Дж. *Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды*. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
10. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
11. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. *Обобщенные сопряженные тензоры напряжений и деформаций* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т.7. – №3. – С.21-43.
12. Knowles K.M., Smith D.A. *The crystallography of the martensitic transformation in equiatomic nickel-titanium* // Acta Metallurgica. – 1981. – Vol.29. – No.1. – Pp.101-110.
13. Kibey S., Sehitoglu H., Johnson D.D. *Energy landscape for martensitic phase transformation in shape memory NiTi* // Acta Materialia. – 2009. – Vol.57. – No.5. – Pp.1624-1629.
14. Otsuka K., Sawamura T., Shimizu K. *Crystal Structure and Internal Defects of Equiatomic TiNi Martensite* // Physica Status Solidi (A). – 1971. – Vol.5. – No.2. – Pp.457-470.

## REFERENCES

1. Movchan A.A., Mishustin I.V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry*. Nanoscience and Technology, 2019, Vol.10, No.3, Pp.233-245.
2. Mishustin I.V. *Model' deformirovaniya splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Model of shape memory alloy deformation with resistance asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.4, Pp.484-498.
3. Mishustin, I.V. *Nanostructural Model of Shape Memory Alloy with Resistance Asymmetry Behavior*. Nanoscience and Technology, 2018, Vol.9, No.2, Pp.165-181.
4. Lexcellent C. *Shape-memory alloys handbook*. London, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013, 379 p.
5. Lagoudas D.C. (Ed.). *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. Springer, 2008, 436 p.
6. Ziolkowski A. *Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys: Theory and Experimental Studies*. Elsevier, 2015, 246 p.

7. Raniecki B., Dietrich L., Kowalewski Z., Socha G., Miyazaki S., Tanaka K., Ziółkowski A. *Experimental methodology for TiNi shape memory alloy testing under complex stress state*. Archives of Mechanics, 1999, Vol.51, No.6, Pp.727-744.
8. Malinin V.G., Malinina N.A., Malinin G.V., Perelygin A.I. *Issledovanie vliyanie vida napryazhennogo sostoyaniya na ehffekt pamyati formy metodami strukturno-analiticheskoy mezomekhaniki [Research of influence of stress state on the shape memory effect by methods of structural-analytical mesomechanics]*. Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologij, 2012, No.2(292), Pp.3-9.
9. Green A.E., Adkins J.E. *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press, 1960, 348 p.
10. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large elastic-plastic deformation: theory, algorithms and applications]*. Moskva, Nauka, 1986, 232 p.
11. Annin, B.D., Korobejnikov, S.N. *Obobshhennye sopryazhennye tenzory napryazhenij i deformatsij [Generalized conjugated tensors of stress and deformation]*. Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki, 2004, Vol.7, No.3, Pp.21-43.
12. Knowles K.M., Smith D.A. *The crystallography of the martensitic transformation in equiatomic nickel-titanium*. Acta Metallurgica, 1981, Vol.29, No.1, Pp.101-110.
13. Kibey S., Sehitoglu H., Johnson D.D. *Energy landscape for martensitic phase transformation in shape memory NiTi*. Acta Materialia, 2009, Vol.57, No.5, Pp.1624-1629.
14. Otsuka K., Sawamura T., Shimizu K. *Crystal Structure and Internal Defects of Equiatomic TiNi Martensite*. Physica Status Solidi (A), 1971, Vol.5, No.2, Pp.457-470.

Поступила в редакцию 27 мая 2022 года.

---

Сведения об авторе:

Мишустин Илья Владимирович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [lewis@nextmail.ru](mailto:lewis@nextmail.ru)

УДК 539.3

EDN DYJSCR (<https://elibrary.ru/dyjscr>)

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЛЕНТЫ 3М НА БАЗЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ\*

Рабинский Л.Н., Бабайцев А.В., Шестеркин П.С.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Одним из методов увеличения сроков эксплуатации циклически нагруженных элементов конструкций различного назначения является улучшение демпфирующих свойств. Существуют различные способы повышения демпфирования, один из которых – использование демпфирующих лент. В работе исследуется влияние демпфирующей ленты 3М на динамические характеристики трехслойной консольной балки. Представлены результаты экспериментальных исследований собственных частот и логарифмических декрементов при свободных колебаниях алюминиевой балки-пластинки без демпфирующих слоев (однослойная балка) и с наклеенными на лицевые поверхности демпфирующими слоями (трехслойная балка). Динамические характеристики вычислены на основе анализа амплитудно-частотных характеристик, полученных методом быстрого преобразования Фурье. Физические константы образцов предварительно определены в статических испытаниях.

Для заданной трехслойной балки Эйлера-Бернулли теоретически определена ее низшая собственная частота, проведено ее сравнение с частотой, вычисленной на основе модели Тимошенко. Для определения декремента трехслойной балки с демпфирующими слоями получено численное решение обратной задачи.

**Ключевые слова:** демпфирующая лента; трехслойная балка; собственные частоты; логарифмический декремент

## DETERMINATION OF THE DAMPING PROPERTIES OF A 3M METAL TAPE BASED ON THE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE DYNAMICS OF A THREE-LAYER ROD AND EXPERIMENTAL DATA

Rabinsky L.N., Babaitsev A.V., Shesterkin P.S.

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

### ABSTRACT

One of the methods for increasing the service life of stress-cycled structural elements for various purposes is to improve the damping capacity. There are various ways to increase damping, one of which is the use of damping layers. The article investigates the effect of 3M damping tape on the three-layer clamped-free beam dynamic characteristics. The results

\* Работа проводилась при финансовой поддержке государственного проекта Министерства образования и науки РФ «Код проекта FSFF-2020-0016».

of natural frequencies experimental studies and logarithmic decrements for free vibrations of an aluminum beam-plate without damping layers (single-layer beam) and with damping layers glued to the front surfaces (three-layer beam) are presented. The dynamic characteristics are calculated based on the amplitude-frequency characteristics analysis obtained by the fast Fourier transform method. The samples' physical constants are predetermined in static tests. For a given three-layer Euler-Bernoulli beam, its lowest natural frequency is theoretically determined and compared with the frequency calculated on the basis of the Timoshenko model. To determine the three-layer beam decrement with damping layers, a numerical solution of the inverse problem is obtained.

**Keywords:** damping tape; three-layer beam; natural frequencies; logarithmic decrement

## ВВЕДЕНИЕ

Анализ динамики механических систем с демпфированием имеет большое значение в различных отраслях техники [1]. Несмотря на то, что выбор модели демпфирования играет ключевую роль в динамических расчётах, в особенности для сложных конструкций [2-5], очень часто для описания процесса демпфирования используются простые классические модели [6-8]. Во многих случаях эти модели не позволяют описать динамику сооружения с необходимой точностью, так как на практике механизмы демпфирования колебаний отличаются большой сложностью [9,10]. Выбрать единую модель для реальных инженерных систем крайне сложно; в большинстве случаев используются различные приближения. В последние годы были предложены и исследованы более сложные модели демпфирования; так, в работе [11] исследован мгновенный отклик систем с распределёнными параметрами методом передаточных функций. Другие авторы работали над невязкими моделями демпфирования. В статье [12] проведено систематическое исследование механических систем с демпфированием.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе исследуются образцы без демпфирующих слоев, представляющие собой металлическую пластину габаритами  $220 \text{ мм} \times 20 \text{ мм} \times 0,8 \text{ мм}$  и с демпфирующими слоями, когда с двух сторон пластины приклеивают демпфирующую ленту толщиной  $0,14 \text{ мм}$ . Металлическая пластина выполнена из алюминиевого сплава 1441, а демпфирующая лента разработана фирмой 3М марки 434. Толщина и состав слоя проверялся с использованием растрового электронного микроскопа, рис.1. Свойства материалов представлены в Таблице 1. Образцы без демпфирующих слоев представлены на рис.2а, а с демпфирующими слоями – на рис.2б. Для каждого варианта испытывалось по 5 однотипных образцов.

Механические характеристики, представленные в Таблице 1, определялись экспериментально. Представленные результаты для ленты 3М даны для металлизированной ленты. Испытания проводились на универсальной электромеханической машине Instron 5969. Скорость движения траверсы при кинематическом нагружении растяжением составляла  $1 \text{ мм/мин}$ . Деформации в испытаниях на растяжение измерялись с использованием видеоэкстензометра. Диаграмма деформирования для образцов из сплава 1441 и ленты 3М марки 434 представлена на рис.3.

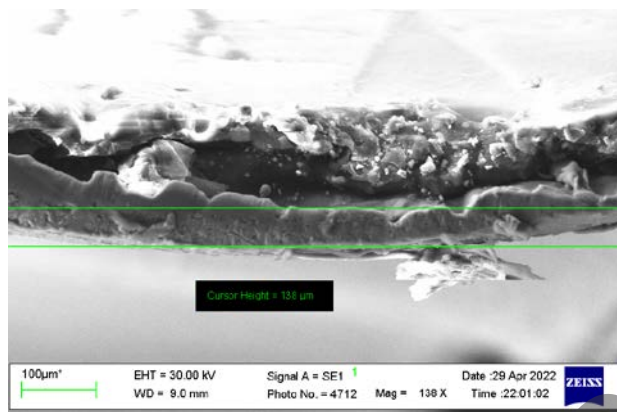


Рис.1. Микроскопия ленты 3М.



а



б

Рис.2. Образцы для испытания. а) образцы без демпфирующих слоев; б) образцы с приклеенными слоями демпфирующего материала.

Таблица 1.

Свойства слоев.

|        | Е, ГПа | $\nu$ | $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> | h, мм |
|--------|--------|-------|----------------------------|-------|
| 1441   | 79     | 0,33  | 2600                       | 0,8   |
| 3М 434 | 70     | 0,3   | 2700                       | 0,14  |

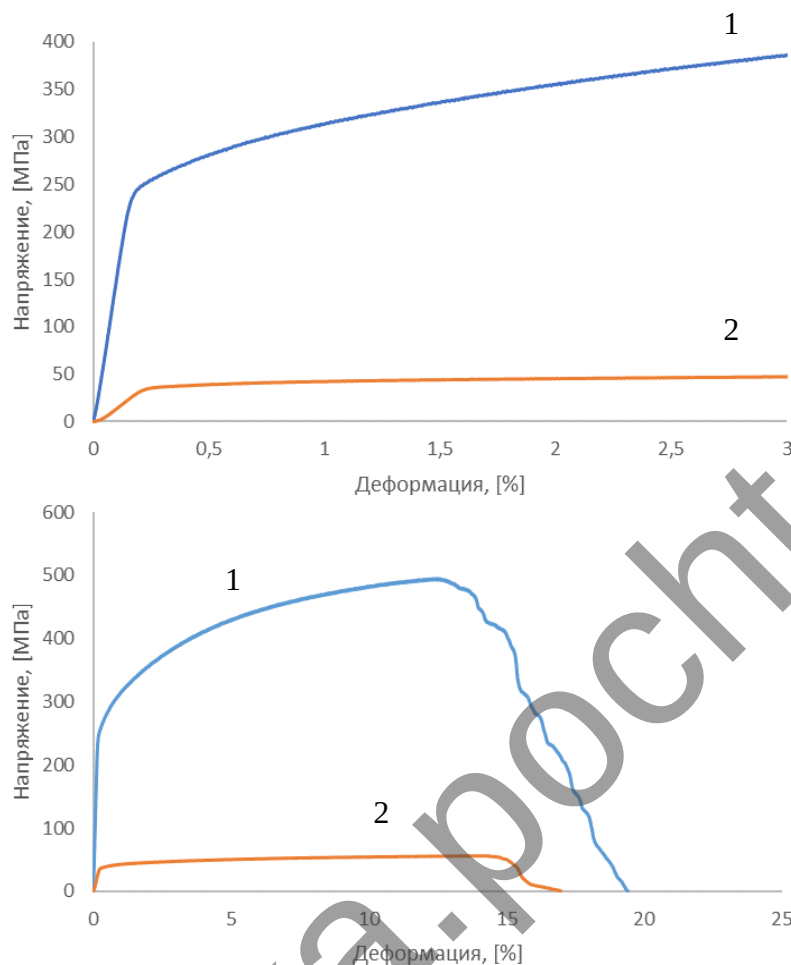


Рис.3. Диаграмма деформирования при растяжении (обозначения кривых: 1 – сплав 1441, 2 – лента 3М 434).

Динамические испытания проводились на образцах с различной длиной захвата. Образцы жестко закреплялись струбциной с одного конца, а на другом конце задавались нагрузки, приводящие к возникновению затухающих изгибных колебаний, преимущественно по первой собственной форме. Для возбуждения колебаний по поверхности образца либо ударяли металлическим ударником, либо задавалось начальное отклонение конца образца от положения равновесия. Регистрация колебаний проводилась с использованием лазерного датчика Laser Triangulation Sensors RF603HS.

Обработка результатов испытаний проводилась с использованием метода быстрого преобразования Фурье для получения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) реализующихся колебаний [13]. На получаемых АЧХ определялся пик, соответствующий первой резонансной частоте. Ширина найденного пика позволяет определить логарифмический декремент образца  $\zeta$  на основании соотношения (ГОСТ 30630.1.8-2002, ASTM E756)

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0},$$

где  $\omega_0$  – частота резонанса, и  $\omega_1 < \omega_2$  – частоты вблизи резонанса, при которых значение амплитуды уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с амплитудой резонанса.

Полученные результаты зависимости логарифмического декремента от амплитуды при длине образца равной 140 мм для собственной частоты, равной 34 Гц, представлены на рис.4.

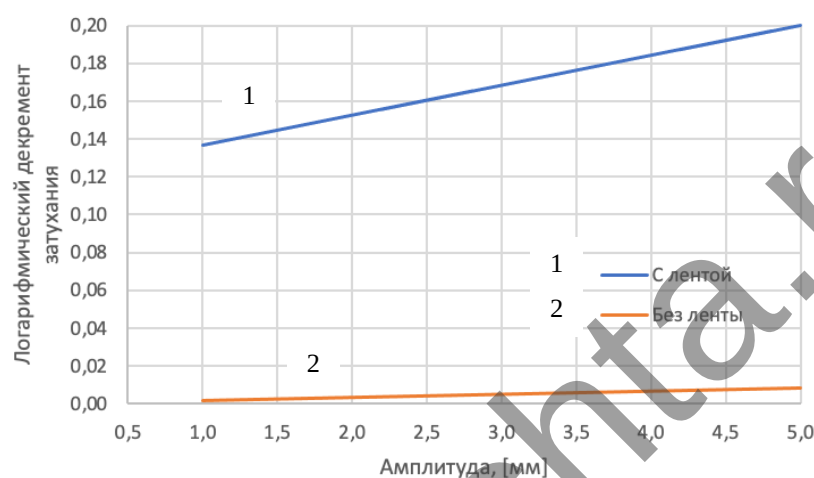


Рис.4. Зависимость коэффициента демпфирования от амплитуды.

#### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Рассмотрим слоистую балку длиной  $l$ , прямоугольного поперечного сечения, состоящего из трех слоев: одного несущего слоя из алюминиевого сплава 1441 и двух демпфирующих слоев из ленты 3М 434. Толщина несущего слоя равна  $h = 0,8$  мм, а демпфирующего —  $\delta = 0,14$  мм (Таблица 1). Схема слоистой балки представлена на рис.5.

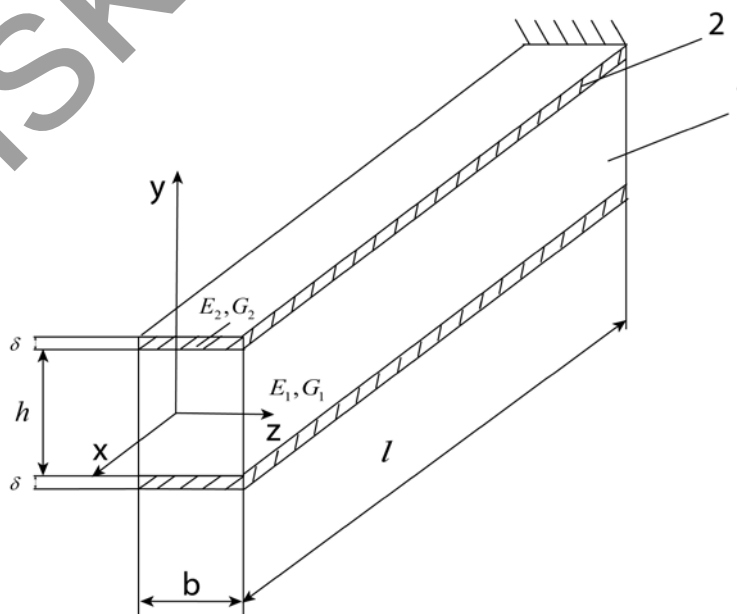


Рис.5. Слоистая балка с демпфирующими слоями.

Собственную частоту изгибных колебаний балки в первом приближении определим из уравнения движения (1), соответствующего модели Эйлера-Бернулли



$$\frac{\partial^4 W(t, x)}{\partial x^4} = a^2 \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $W(t, x)$  – прогиб балки,  $a^2 = \frac{\rho h}{D}$ ,  $t, x$  – время и продольная координата балки,

$$D = \frac{1}{1-\mu^2} \left[ E_1 \frac{h^3}{12} + 2E_2 \left( \frac{\delta^3}{12} + \delta \frac{h^2}{4} \right) \right]$$

– цилиндрическая жесткость,  $\rho h = \rho_1 h + 2\rho_2 \delta$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности несущего и демпфирующего слоев, соответственно.

Для решения поставленной задачи представим прогиб балки в виде

$$W(t, x) = w(x) \sin(\omega t). \quad (2)$$

Тогда уравнение относительно амплитуды  $w(x)$ , следующее из (1) и (2), будет иметь вид

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k^4 w(x) = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3)  $k^4 = a^2 \omega^2$ . Решение уравнения (3) будет, в свою очередь, иметь вид

$$w(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) + c_3 \operatorname{sh}(kx) + c_4 \operatorname{ch}(kx). \quad (4)$$

Удовлетворяя краевым условиям консольного закрепления в виде (5)

$$w(x)|_{x=0} = 0 \quad \frac{dw(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

получим трансцендентное уравнение (6) для определения собственной частоты

$$\cos(kl) \operatorname{ch}(kl) = -1 \quad (6)$$

наименьший положительный корень которого –  $kl = 1,875$ ; низшую собственную частоту изгибных колебаний балки определим в виде

$$\omega = \omega_k = \frac{1,875^2}{al^2}. \quad (7)$$

Для вычисления собственной частоты второго приближения используем модель Тимошенко [14]

$$\rho F \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial t^2} - GF^1 \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial x^2} + GF^1 \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$\rho J \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - D \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + GF^1 \left[ \varphi(t, x) - \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right] = 0. \quad (9)$$

В уравнениях (8) и (9)  $\varphi$  – угол наклона нейтральной линии, обусловленный изгибом,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $F^1 = 1,2F$ ,  $G$  – модуль сдвига,  $J$  – момент инерции сечения. Выражая из системы уравнений (8)-(9) угол  $\varphi$ , получаем одно уравнение движения (10) относительно поперечного перемещения

$$\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{\rho h}{D} \left( \frac{J}{F} + \frac{D}{GF^1} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho h}{D} \frac{J \rho}{GF^1} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0. \quad (10)$$

Представим решение уравнения (10) в виде

$$W(x, \tau) = w(x) \sin(\omega \tau), \quad (11)$$

где  $t = \tau/\omega_k$ ,  $\varpi = \omega/\omega_k$ , тогда для определения собственной частоты по Тимошенко получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (12)

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + a^2 b^2 \varpi^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + a^2 \varpi^2 (c^2 \varpi^2 - 1) w(x) = 0. \quad (12)$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\rho h}{D} = \frac{(\rho_1 h + 2\rho_2 \delta)(1 - \mu^2)}{E_1 h^3/12 + 2E_2 (\delta^3/12 + \delta h^2/4)}, \\ b^2 &= \frac{J}{F} + \frac{D}{hG_1 + 2\delta G_2}; \quad \frac{J}{F} = \frac{h^3/12 + 2(\delta^3/12 + \delta h^2/4)}{h + 2\delta}, \\ \frac{D}{GF^1} &= \frac{E_1 \frac{h^3}{12} + 2E_2 \left( \frac{\delta^3}{12} + \delta \frac{h^2}{4} \right)}{(1 - \mu^2)(hG_1 + 2\delta G_2)} \quad c^2 = \frac{\frac{h^3}{12} \rho_1 + 2\rho_2 \left( \frac{\delta^3}{12} + \delta \frac{h^2}{4} \right)}{hG_1 + 2\delta G_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя подстановку Эйлера  $w(x) = Ae^{\lambda x}$ , получаем характеристическое уравнение четвертого порядка

$$\lambda^4 + a^2 b^2 \varpi^2 \lambda^2 + a^2 \varpi^2 (c^2 \varpi^2 - 1) = 0. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) будет иметь вид

$$\lambda^2 = \frac{-a^2 b^2 \varpi^2 \pm \varpi a \sqrt{\varpi^2 (a^2 b^4 - 4c^2) + 4}}{2} \approx \begin{cases} -\frac{\varpi a}{2} (2 + ab^2 \varpi) = -\alpha^2 = -\varpi a \\ \frac{\varpi a}{2} (2 - ab^2 \varpi) = \alpha^2 = \varpi a \end{cases}. \quad (15)$$

При пренебрежении в выражении (15) слагаемыми высшего порядка малости получим

$$\lambda_{1,2}^2 = \pm \alpha^2: \lambda_{1,2} = \pm \alpha, \lambda_{3,4} = \pm i\alpha \quad (16)$$

и решение уравнения (12) будет иметь вид

$$w(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x) + c_3 \operatorname{sh}(\alpha x) + c_4 \operatorname{ch}(\alpha x). \quad (17)$$

Граничные условия консольного закрепления будут иметь вид (18)

$$w(x)|_{x=0} = 0, \quad \varphi(x)|_{x=0} = 0, \quad M_z(x)|_{x=l} = 0, \quad Q_y(x)|_{x=l} = 0. \quad (18)$$

Краевые условия (18) для балки Тимошенко можно записать в виде [15]

$$\begin{aligned} w(x)|_{x=0} &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[ (1 + A\varpi^2) w(x) + \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \Big|_{x=0} &= 0, \\ \left( \varpi^2 B w(x) + \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \Big|_{x=l} &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[ C w(x) - \varpi^2 B \frac{dw(x)}{dx} - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \Big|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя выражение (16) в краевые условия (19), получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned}
c_2 + c_4 &= 0, \\
(1 + A\varpi^2 - \alpha^2)c_1 + (1 + A\varpi^2 + \alpha^2)c_3 &= 0, \\
\sin(\alpha l)(B\varpi^2 - \alpha^2)c_1 + \cos(\alpha l)(B\varpi^2 - \alpha^2)c_2 + \\
&+ \operatorname{sh}(\alpha l)(B\varpi^2 + \alpha^2)c_3 + \operatorname{ch}(\alpha l)(B\varpi^2 + \alpha^2)c_4 = 0, \\
[\sin(\alpha l)B\varpi^2\alpha + (\alpha^2 + C)\cos(\alpha l)]c_1 + \\
&+ [\cos(\alpha l)B\varpi^2\alpha - (\alpha^2 + C)\sin(\alpha l)]c_2 + \\
&+ [(C - \alpha^2)\operatorname{ch}(\alpha l) - B\varpi^2\alpha\operatorname{sh}(\alpha l)]c_3 + \\
&+ [(C - \alpha^2)\operatorname{sh}(\alpha l) - B\varpi^2\alpha\operatorname{ch}(\alpha l)]c_4 = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь введены обозначения

$$A = \frac{D}{GF^1} \frac{\rho}{\psi G} \omega_k^2, \quad B = \omega_k^2 \frac{\rho_1 h + 2\rho_2 \delta}{G_1 h + 2G_2 \delta}, \quad C = \frac{\rho}{E}.$$

Приравнявая определитель системы (20) нулю, получим трансцендентное уравнение (19) для собственной частоты

$$\Phi(kl, \sin(kl), \cos(kl), \operatorname{sh}(kl), \operatorname{ch}(kl)) = 0. \tag{21}$$

Выражение (21) в развернутом виде имеет громоздкий вид и здесь не приводятся. Численное решение уравнения (21) дает наименьший положительный корень  $kl = 1,731$ . Сравнивая это решение с результатами, полученными для балки Эйлера-Бернулли, можно сделать вывод, что решения достаточно близки и дальнейшее решение задачи на определение низшей собственной частоты изгибных колебаний вполне можно получить на базе модели Бернулли.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ ЛЕНТЫ ЗМ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для определения коэффициентов демпфирования решим обратную задачу. Для этого в коэффициенты для демпфирующих полос введем комплексный модуль сдвига  $G_{2,3} = G_2(1 + iG_*)$ , где  $G_* \in (0,1)$  тогда выражения для коэффициентов уравнения (13) примут вид

$$\begin{aligned}
b^2 &= \frac{J}{F} + \frac{D}{hG_1 + 2\delta G_2(1 + iG_*)} = \frac{J}{F} + \frac{D(hG_1 + 2\delta G_2 - i2\delta G_2 G_*)}{(hG_1 + 2\delta G_2)^2 - (2\delta G_2 G_*)^2} = \alpha_1 + i\beta_1, \\
\alpha_1 &= \frac{J}{F} + \frac{D(hG_1 + 2\delta G_2)}{(hG_1 + 2\delta G_2)^2 - (2\delta G_2 G_*)^2}, \quad \beta_1 = -\frac{2\delta G_2 G_*}{(hG_1 + 2\delta G_2)^2 - (2\delta G_2 G_*)^2}, \\
c^2 &= \frac{\frac{h^3}{12}\rho_1 + 2\rho_2\left(\frac{\delta^3}{12} + \delta\frac{h^2}{4}\right)}{hG_1 + 2\delta G_2(1 + iG_*)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[ \frac{h^3}{12} \rho_1 + 2\rho_2 \left( \frac{\delta^3}{12} + \delta \frac{h^2}{4} \right) \right] (hG_1 + 2\delta G_2 - i2\delta G_2 G_*)}{(hG_1 + 2\delta G_2)^2 - (2\delta G_2 G_*)^2} = \alpha_2 + i\beta_2, \\
\alpha_2 &= \frac{\left[ \frac{h^3}{12} \rho_1 + 2\rho_2 \left( \frac{\delta^3}{12} + \delta \frac{h^2}{4} \right) \right] (hG_1 + 2\delta G)}{(hG_1 + 2\delta G_2)^2 - (2\delta G_2 G_*)^2}, \\
\beta_2 &= -\frac{\left[ \frac{h^3}{12} \rho_1 + 2\rho_2 \left( \frac{\delta^3}{12} + \delta \frac{h^2}{4} \right) \right] 2\delta G_2 G}{(hG_1 + 2\delta G_2)^2 - (2\delta G_2 G_*)^2},
\end{aligned} \tag{22}$$

дискриминант в выражении (15) примем в виде (23)

$$\begin{aligned}
\varpi^2 (a^2 b^4 - 4c^2) + 4 &= a^2 (\alpha_1 + i\beta_1)^2 - 4(\alpha_2 + i\beta_2) + 4 = \alpha_3 + i\beta_3, \\
\alpha_3 &= \varpi^2 (a^2 \alpha_1^2 - \beta_1^2 - 4\alpha_2) + 4, \quad \beta_3 = \varpi^2 (2a^2 \alpha_1 \beta_1 - 4\beta_2).
\end{aligned} \tag{23}$$

Тогда выражение (15) примет вид (24)

$$\lambda^2 = \frac{-a^2 (\alpha_1 + i\beta_1)^2 \varpi^2 \pm \varpi a \sqrt{\alpha_3 + i\beta_3}}{2} = \operatorname{Re}(\lambda^2) + i \operatorname{Im}(\lambda^2). \tag{24}$$

Решение этого уравнения будет

$$w(x) = c_1 e^{\eta_1 x} + c_2 e^{-\eta_1 x} + c_3 e^{\eta_2 x} + c_4 e^{-\eta_2 x}. \tag{25}$$

Удовлетворяя граничным условиям (16)-(17), получаем систему однородных алгебраических уравнений (26) относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 0, \\
(1 + A\varpi^2 + \eta_1^2) \eta_1 c_1 - (1 + A\varpi^2 + \eta_1^2) \eta_1 c_2 + \\
&= (1 + A\varpi^2 + \eta_2^2) \eta_2 c_3 - (1 + A\varpi^2 + \eta_2^2) \eta_2 c_4 = 0, \\
(B\varpi^2 + \eta_1^2) e^{\eta_1 l} c_1 + (B\varpi^2 + \eta_1^2) e^{-\eta_1 l} c_2 + \\
&+ (B\varpi^2 + \eta_2^2) e^{\eta_2 l} c_3 + (B\varpi^2 + \eta_2^2) e^{-\eta_2 l} c_4 = 0, \\
(C - \eta_1^2 - B\varpi^2 \eta_1) \eta_1 e^{\eta_1 l} c_1 + (C - \eta_1^2 - B\varpi^2 \eta_1) \eta_1 e^{-\eta_1 l} c_2 + \\
&+ (C - \eta_2^2 - B\varpi^2 \eta_2) \eta_2 e^{\eta_2 l} c_3 + (C - \eta_2^2 - B\varpi^2 \eta_2) \eta_2 e^{-\eta_2 l} c_4 = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Приравнявая определитель системы (26) нулю, получим трансцендентное уравнение (27)

$$\tilde{F}(\eta_1 l, \eta_2 l) = 0, \quad \eta_{1,2} = \eta_{1,2}(\omega; G_*), \quad \omega \in \mathbb{C}. \tag{27}$$

На рис.6 приведена зависимость левой части (27) от  $\operatorname{Im}(\varpi^2)$  при фиксированном значении  $\operatorname{Re}(\varpi^2)$ .

$$I_m(\varpi^2) G_* = 0.23, \quad \operatorname{Re} \varpi = 1.7.$$

Варьируя коэффициент  $G_*$  в пределах от 0 до 1, получаем при постоянном значении  $\operatorname{Re}(\varpi^2)$  по графику, приведенному на рис.6, параметр  $\operatorname{Im} \varpi$ , соответствующий корню уравнения (27) с наименьшей положительной

действительной частью. При этом  $G_* = 0.23$ . Далее по формуле (28) вычисляется логарифмический декремент

$$\tilde{\lambda} = 2\pi \frac{\operatorname{Im} \varpi}{\operatorname{Re} \varpi} = 2\pi \frac{0,04}{1,731} \approx 0,145. \quad (28)$$

Этот результат достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис.4), что говорит об адекватности проделанных вычислений.

$\tilde{\Phi}(\eta_1 l, \eta_2 l)$

$G_* = 0.23, \operatorname{Re} \varpi = 1.7$

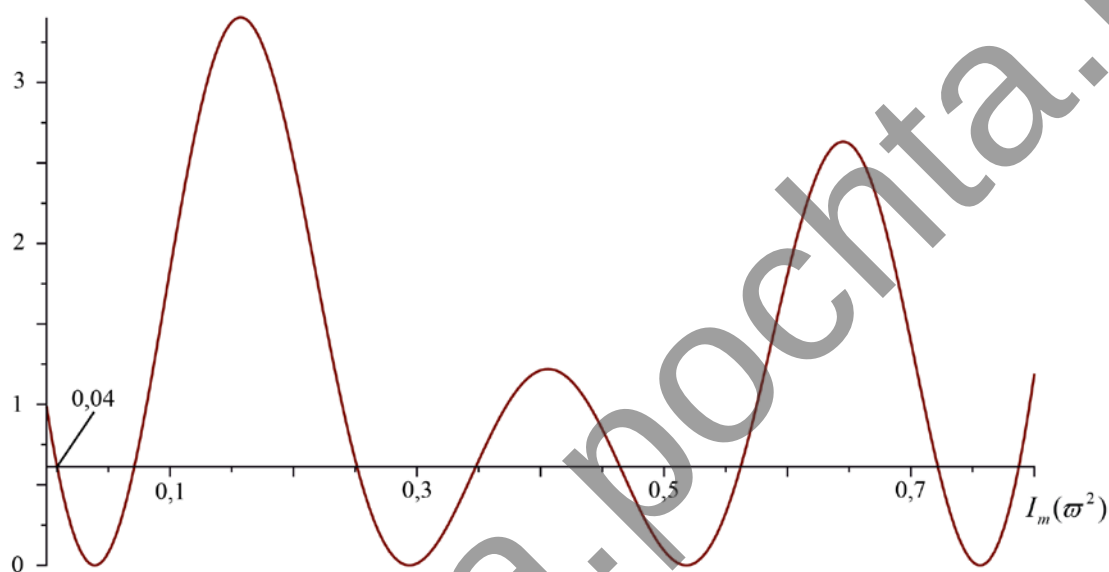


Рис.6. Нули трансцендентного уравнения от мнимой части частоты.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты статических и динамических испытаний образцов без и с демпфирующими лентами. Определены динамические характеристики трехслойных балок. Установлена зависимость изменения коэффициента демпфирования от амплитуды для образцов с и без демпфирующих лент для разных амплитуд.

Для проверки проведенных экспериментальных исследований решается обратная задача по определению логарифмического декремента затухания. Показано, что для определения собственной частоты балки достаточно использовать балку Кирхгофа, для определения коэффициента демпфирования балку Тимошенко.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Соломатов В.И., Бобрышев А.Н., Химмлер К.Г. *Полимерные композиционные материалы в строительстве*. – М.: Стройиздат, 1988. – 312 с.
2. Wu G., Yang J.-M. *The mechanical behavior of GLARE laminates for aircraft structures* // Jom. – 2005. – Vol.57. – No.1. – Pp.72-79.
3. Jakubczak P., Bienias J., Surowska B. *Interlaminar shear strength of fibre metal laminates after thermal cycles* // Composite Structure. – 2018. – Vol.206. – Pp.876-887.

4. Vogeslang L.B., Volt A. *Development of Fibre Metal Laminates for Advanced Aerospace Materials* // J. of Mater Processing Technol. – 2000. – Vol.103. – Pp.1-5.
5. Bai S.L., Djafari V., Andréani M., François D. *In site study of short-beam shear tests for composite materials* // Composites Science and Technology. – 1995. – Vol.55. – Iss.4. – Pp.343-348.
6. Sinmazçelik T., Avcu E., Bora M. Ö., Çoban O. *A review: Fibre metal laminates, background, bonding types and applied test methods* // Materials and Design. – 2011. – Vol.32. – Iss.7. – Pp.3671-3685.
7. Kotik H.G., Perez-Ipiña J.E. *Short-beam shear fatigue behavior of fiber metal laminate (GLARE)* // Intern. J. of Fatigue. – 2017. – Vol.95. – Pp.236-242.
8. Ганбаров А.Б. *Обоснование и разработка вибродемпфирующего покрытия с упруго-волокнутой структурой: дис. ... канд. техн. наук: 01.04.06.* – Воронеж, 2004. – 130 с.
9. Антипов В.В., Добрянский В.Н., Короленко В.А., Лурье С.А., Серебренникова Н.Ю., Соляев Ю.О. *Оценка эффективных механических характеристик слоистого алюмокомпозитного пластика в условиях одноосного растяжения* // Вестник Московского авиационного института. – 2018. – Т.25, №2. – С.221-229.
10. Carlsson L.A., Adams D.F., Pipes R.B. *Experimental characterization of advanced composite materials.* – CRC press, 2014.
11. Kubit A., Trzepieciniski T., Klonica M., Hebda M., Pytel M. *The influence of temperature gradient thermal shock cycles on the interlaminar shear strength of fibre metal laminate composite determined by the short beam test* // Composites Part B: Engineering. – 2019. – Vol.176. – 107217.
12. Megahed M., Abd El-baky M.A., Alsaedy A.M., Alshorbagy A.E. *An experimental investigation on the effect of incorporation of different nanofillers on the mechanical characterization of fiber metal laminate* // Composites Part B: Engineering. – 2019. – Vol.176. – 107277.
13. Rao S.S. *Mechanical Vibrations.* – Addison-Wesley, MA. – 2019.
14. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Механика деформируемых твердых тел. Том 5. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. Итоги науки и техники.* – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
15. Lydik S.Jacobsen. *Transactions of the ASME* // J. of Applied Mechanics. –1938. – Vol.5. – No.1. – Pp.A1-A6.

## REFERENCES

1. Solomatov V.I., Bobryshev A.N., Himmler K.G., Solomatova V.I. *Polimernye kompozitsionnye materialy v stroitel'stve [Polymer composite materials in construction]*. Moskva, Strojizdat, 1988, 312 p.
2. Wu G., Yang J.-M. *The mechanical behavior of GLARE laminates for aircraft structures*. Jom, 2005, Vol.57, No.1, Pp.72-79.
3. Jakubczak P., Bienias J., Surowska B. *Interlaminar shear strength of fiber metal laminates after thermal cycles*. Composite Structure, 2018, Vol.206, Pp.876-887.
4. Vogeslang L.B., Volt A. *Development of Fiber Metal Laminates for Advanced Aerospace Materials*. J. of Mater Processing Technol., 2000, Vol.103, Pp.1-5.
5. Bai S.L., Djafari V., Andréani M., François D. *In site study of short-beam shear tests for composite materials*. Composites Science and Technology, 1995, Vol.55, Iss.4, Pp.343-348.

6. Sinmazçelik T., Avcu E., Bora M. Ö., Çoban O. *A review: Fiber metal laminates, background, bonding types and applied test methods*. Materials and Design, 2011, Vol.32, Iss.7, Pp.3671-3685.
7. Kotik H.G., Ipina J.E.P. *Short-beam shear fatigue behavior of fiber metal laminate (GLARE)*. Int J Fatig 2017; 95:236-42.
8. Ganbarov A.B. *Obosnovanie i razrabotka vibrodempfiruyushhego pokrytiya s uprugo-voloknistoï strukturoï: dissertatsiya kandidata tekhnicheskikh nauk: 01.04.06 [Substantiation and development of a vibration-damping coating with an elastic-fibrous structure: PhD in Tech. Science: 01.04.06]*. Voronezh, 2004, 130 p.
9. Antipov V.V., Dobryansky V.N., Korolenko V.A., Lurie S.A., Serebrennikova N.Yu., Solyaev Yu.O. *Otsenka ehffektivnykh mekhanicheskikh kharakteristik sloistogo alyumostekloplastika v usloviyakh odnoosnogo rastyazheniya [Evaluation of the effective mechanical characteristics of laminated alumina-glass-reinforced plastic under uniaxial tension]*. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute, 2018, Vol.25, No.2, Pp.221-229.
10. Carlsson L.A., Adams D.F., Pipes R.B. *Experimental characterization of advanced composite materials*. CRC press, 2014.
11. Kubit A., Trzepieciniski T., Klonica M., Hebda M., Pytel M. *The influence of temperature gradient thermal shock cycles on the interlaminar shear strength of fiber metal laminate composite determined by the short beam test*. Composites Part B: Engineering, 2019, Vol.176, 107217.
12. Megahed M., Abd Elbaky M.A., Alsaeedy A.M., Alshorbagy A.E. *An experimental investigation on the effect of incorporation of different nanofillers on the mechanical characterization of fiber metal laminate*. Composites Part B: Engineering, 2019, Vol.176, 107277.
13. Rao S.S. *Mechanical Vibrations*. Addision-Wesley, MA, 2019.
14. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Mekhanika deformiruemykh tverdykh tel. Tom 5. Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej plastin i obolochek. Itogi nauki i tekhniki [Mechanics of deformable solids. Volume 5. Non-classical theories of oscillations of plates' rods and shells. Itogi Nauki i Tekhniki]*. Moskva, VINITI, 1973, 272 p.
15. Lydik S. *Jacobsen Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics*, 1938, Vol.5, No.1, Pp.A1-A6.

*Поступила в редакцию 30 июня 2022 года.*

---

**Сведения об авторах:**

Рабинский Лев Наумович – д.ф.-м.н., проф., зам.дир., Институт общинженерной подготовки (Институт №9), ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

Бабайцев Арсений Владимирович – доц., н.с., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

Шестеркин Павел Сергеевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [blackshoot.92@mail.ru](mailto:blackshoot.92@mail.ru)



УДК 531.3

EDN LGEXGO (<https://elibrary.ru/lgexgo>)

## ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАУСА В ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН\*

Жаворонок С.И., Курбатов А.С.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия  
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (Национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия  
НИУ Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Предложена новая формулировка начально-краевой задачи теории N-го порядка ортотропных оболочек, основанная на методах аналитической механики континуальных систем. Введена некоторая гладкая базисная поверхность, и на двумерном многообразии, соответствующем данной поверхности, определены криволинейные координаты. Модель нетонкой оболочки как трехмерного упругого тела определена множеством переменных поля первого рода, пространственной и граничной плотностями функционала Лагранжа. В качестве переменной поля первого рода рассмотрен псевдовектор перемещения, заданный ковариантными компонентами вектора истинного перемещения в базисе касательного расслоения двумерного многообразия. Компоненты псевдовектора обобщенного напряжения на площадках с нормалью, сонаправленной базисному вектору одной из криволинейных координат базисной поверхности, определены дифференцированием пространственной плотности функционала Лагранжа по ковариантным производным компонентов псевдовектора перемещения по выбранному направлению. Преобразованием Лежандра пространственной плотности функционала Лагранжа по данным ковариантным производным переменной поля получена пространственная плотность смешанного функционала, зависящего от переменных состояния – введенного псевдовектора напряжения, псевдовекторов перемещения и скорости, а также ковариантных производных компонентов псевдовектора перемещения по второму координатному направлению. Введена биортогональная базисная система функций нормальной координаты, определена система новых переменных состояния, заданных на касательном расслоении двумерного многообразия, соответствующего базисной поверхности, коэффициентами разложения переменных состояния по биортогональному базису. Поверхностная и контурная плотности смешанного функционала, определяющего двумерную модель оболочки, порождаются соответствующей редукцией пространственной и граничной плотностей смешанного функционала при удержании  $N+1$  коэффициента разложения. Уравнения Эйлера-Лагранжа, вытекающие из принципа Гамильтона-Остроградского, разрешены относительно ковариантных производных новых переменных состояния и в определенном смысле эквивалентны уравнениям Рауса механики дискретных систем. Приложение обобщенных уравнений Рауса теории оболочек N-го порядка к задачам о дисперсии нормальных волн приводит к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа, позволяющей построить действительные, мнимые и комплексные ветви дисперсионных кривых, соответствующие распространяющимся и затухающим модам.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №22-21-00800).



Для изотропного плоского слоя получено решение спектральной задачи и исследована сходимость решения на базе теории N-го порядка для мнимых ветвей к точному решению во втором квадранте комплексной плоскости в некоторых узлах решетки Миндлина.

**Ключевые слова:** оболочки ортотропные; теория N-го порядка; динамика аналитическая; системы Лагранжевы; Лежандра преобразование; Пауса уравнения обобщенные; волны нормальные; ветви дисперсионные; моды затухающие

## THE GENERALIZED ROUTH EQUATIONS IN THE ORTHOTROPIC SHELL THEORY OF N-TH ORDER AND THEIR APPLICATION TO NORMAL WAVE DISPERSION PROBLEMS

Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
National Research University MGSU, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

A new formulation of the initial-boundary value problem of the N-th order orthotropic shells theory based on the methods of analytical mechanics of continuum systems is proposed below. Some smooth base surface is introduced, and curvilinear coordinates are determined on the two-dimensional manifold corresponding to the base surface. The model of a non-thin shell as a three-dimensional elastic body is defined by a set of field variables of the first kind, and the spatial and boundary densities of the Lagrange functional. As a field variable of the first kind, a pseudovector of displacement is considered, given by covariant components of the vector of true displacement in the basis of the tangent bundle of a two-dimensional manifold. The components of the generalized stress pseudovector on sections with normal unit co-directed to the base vector of one of the curvilinear coordinates are defined by differentiating the spatial density of the Lagrange functional by covariant derivatives of the components of the displacement pseudovector in the selected direction. By Legendre transformation of the spatial density of the Lagrange functional with respect to the covariant derivatives of the field variables, the spatial density of the mixed functional is obtained, depending on the state variables – the introduced stress pseudovector, displacement and velocity pseudovectors, as well as covariant derivatives of the components of the displacement pseudovector in the second coordinate direction. A biorthogonal base system of functions of the dimensionless normal coordinate is introduced, a system of new state variables defined on the tangent bundle of a two-dimensional manifold corresponding to the basis surface is determined by the series coefficients of state variables with respect to the biorthogonal base system. The surface and contour densities of the mixed functional defining the two-dimensional shell model are obtained by the corresponding reduction of the spatial and boundary densities of the mixed functional while retaining first N+1 series coefficient. The Euler-Lagrange equations, which follow from the Hamilton-Ostrogradsky principle, are resolved hence with respect to covariant derivatives of new state variables and, in a certain sense, are equivalent to the known Routh equations of the analytical mechanics of discrete systems. The application of the generalized Routh equations of the N-th order shell theory to problems of normal wave dispersion leads to a spectral problem linear with respect to the wavenumber, which allows one to construct as well real as imaginary and complex branches of dispersion curves corresponding to propagating and evanescent wave modes. A solution of the spectral problem for an isotropic plane layer is obtained and the solution convergence based on the N-th order theory to the exact solution in the second quadrant of the complex plane at some nodes of the Mindlin grid is studied for imaginary branches.

**Keywords:** orthotropic shells; shell theory of N-th order; analytical dynamics of continua; Lagrangian systems; Legendre transform; generalized Routh equations; normal waves; dispersion branches; evanescent modes

## ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи о дисперсии нормальных волн в тонкостенных волноводах является теоретической основой разработки методов неразрушающего контроля и выявления дефектов в различных элементах из композиционных материалов [1] – как слоистых, так и функционально-градиентных [2,3]. Полное исследование дисперсии требует построения не только действительных ветвей дисперсионных кривых, соответствующих распространяющимся модам нормальных волн, но также мнимых и комплексных ветвей, соответствующих затухающим модам. С теоретической точки зрения роль комплексных корней особенно важна «...для построения полных наборов частных решений, дающих возможность удовлетворить граничным условиям на торцах волновода» ([4], с.128). В инженерной практике затухающие нормальные волны играют существенную роль в неразрушающей диагностике. Так, автор работы [5] доказал возможность экспериментального обнаружения усталостных трещин, излучающих затухающие моды, которые «...вносят значительный вклад в локальные амплитуды моды (волн) Лэмба на границе трещины»<sup>†</sup> ([5], с. 134). Известные методы передаточных и реверберационных матриц (см. обзор [2]), одним из ключевых недостатков которых является неустойчивость решения либо на высоких, либо на низких частотах [2], а также метод глобальных матриц требуют сложных итерационных алгоритмов вычисления корней трансцендентного характеристического уравнения, особенно комплексных [2]; к решению трансцендентного уравнения сводится и метод степенных рядов (см. напр. [6]). Эффективной альтернативой являются методы полуаналитических конечных элементов ([7,8], см. также обзор [3]) и особенно метод, именуемый зарубежными авторами «методом ортогональных полиномов», предложенный в работах [9-11], основанный на разложении неизвестных задачи в обобщенные ряды Фурье по некоторой ортогональной системе (напр., для слоя – по полиномам Лежандра); таким образом, осуществляется пространственная редукция модели волновода в трансверсальном направлении. Заметным преимуществом данного подхода является приведение задачи о дисперсии волн к спектральной задаче  $|\mathbf{A}(\kappa) - \omega^2 \mathbf{I}| = 0$ , где собственным значением в исходном варианте метода [9-14] является квадрат фазовой частоты волны  $\omega^2(\kappa)$ ,  $\kappa$  – волновое число; алгоритмы численного решения спектральных задач, как правило, устойчивы. Метод применим в случае слоистых волноводов с близкими свойствами слоев [12], функционально-градиентных волноводов различной формы [13,14] и допускает обобщение на случай слоистых волноводов с существенно различными физическими константами слоев [15,16] (см. также обзор [3]), а также на случай моментно-упругих материалов [17]. Вычисление эффективных упругих постоянных двумерной модели волновода для неоднородного материала сводится к операции интегрирования, причем использование известных рекуррентных

<sup>†</sup> Crack-induced NPLs are the attractive feature to identify and localize an invisible crack, because they ... significantly contribute to local Lamb mode amplitudes at a crack interface

соотношений для ортогональных полиномов [18] существенно снижает затраты машинного времени [19,20].

Построение мнимых и комплексных ветвей дисперсионных кривых на основе метода ортогональных полиномов не приводит к вычислительным затруднениям, но требует перехода к спектральной задаче  $|\mathbf{B}(\omega) - \kappa \mathbf{I}| = 0$ , линейной относительно волнового числа  $\kappa(\omega)$ . Большинство авторов такой переход осуществляется на этапе постановки спектральной задачи введением переменной  $P_i^{(k)} = \kappa U_i^{(k)}$ , где  $U_i^{(k)}$  – амплитуда перемещения, соответствующее  $k$ -й базисной функции  $p_{(k)}(\zeta)$ ,  $\zeta$  – трансверсальная координата [21-23]. Уравнения движения формулируются, как и в случае традиционного метода ортогональных полиномов, в обобщенных перемещениях. В работе [21] построены дисперсионные ветви распространяющихся и затухающих волн для однородного, в [24] – функционально-градиентного пьезоупругого цилиндрического волновода секториального сечения; в работе [23] – для окружных волн в пьезоупругой, в [22] – упругой функционально-градиентной, а в [25] – в ортотропной упругой полой сферической оболочке из волокнистого композиционного материала. Позднее авторами решены задачи о дисперсии волн в вязкоупругих волноводах: функционально-градиентном полой цилиндре [26] на базе модели Кельвина-Фойхта и пластине с предварительными напряжениями [27] на основе модели дробного порядка. Наконец, в [28] приводятся результаты для термоупругого призматического волновода, полученные на основе теории Грина-Линдси.

Следует заметить, что «метод ортогональных полиномов» представляет собой одно из приложений общей «трехмерной» (в соответствии с терминологией А.А. Амосова [29]) теории оболочек к рассматриваемому классу стационарных задач динамики тонких тел. Здесь и далее под теориями оболочки понимаются модели, формулируемые в терминах двумерного многообразия  $S$  [30] и являющиеся континуально-дискретными [31]. Трехмерные теории оболочек, допускающие адекватное приближение напряженно-деформированного состояния в т.н. областях неприводимости (т.е. в тех областях  $V_3 \in V$ , где трехмерное поле тензора напряжения  $\sigma(M')$ ,  $M' \in V_3$  не может быть с допустимой погрешностью восстановлено по главному вектору  $\mathbf{T}(M)$  и главному моменту  $\mathbf{M}(M)$  внутренних сил, заданных на соответствующей подобласти  $S_3 \subseteq S$  двумерного многообразия [31]), подразумевают введение дополнительных степеней свободы, кроме вектора перемещения  $\mathbf{u}(M)$  и, возможно, вектора вращения  $\phi(M)$ ,  $M \in S$ . Так как решение проблемы приведения трехмерной начально-краевой задачи механики деформируемого твердого тела к двумерной задаче теории оболочек не единственно [31], существуют различные классы трехмерных теорий, основанные на разных методах приведения: полуобратном (т.е. методе гипотез) [32], асимптотическом интегрировании уравнений механики деформируемого твердого тела [33-36], вариационно-асимптотическом подходе [37], методе множественных базовых поверхностей (напр., [38,39]), разложении неизвестных в ряды Маклорена [31] или ряды Фурье по некоторой системе базисных функций нормальной координаты [29,31,40], и др. (см. напр. обзорные работы [41,42]). Приложение метода гипотез к задачам динамики оболочек ограничивается, в основном, низкочастотными приближениями и низшими ветвями

дисперсионных кривых; кроме того, построение полуобратным методом непротиворечивых теорий высокого порядка затруднительно [43-45]. Асимптотический подход – как к построению двумерных моделей [35], так и к анализу решений на их основе [46] – является на текущий момент наиболее эффективным инструментом качественного анализа динамики тонкого неоднородного тела [47], позволяя выявлять новые эффекты (кромочные волны в пластинах [48] и оболочках [49], волны в наследственно-упругих волноводах [50] и вязкоупругих волноводах [51], низкочастотные волны в кровеносных сосудах [52] и др.). однако, построение высших приближений (там, где они необходимы) на базе асимптотического сталкивается с трудностями, особенно в случае неоднородных тел. В свою очередь, метод редукции пространственной размерности трехмерной задачи механики деформируемого твердого тела, предложенный в работах [29,40,53-57] и ряде других обладает рядом преимуществ: в первую очередь, обеспечивает построение иерархии моделей различного порядка на основе единой формулировки [29,58], кроме того, «... иерархические модели, полученные таким образом, способны аппроксимировать решение полной трехмерной задачи... в различных нормах, что не свойственно моделям, полученным, например, с помощью методов асимптотического разложения»<sup>‡</sup> ([59], с.2). В качестве системы базисных функций в пространстве  $H[-1,1]$  при построении теорий оболочек вводятся, как правило, ортогональные на отрезке  $[-1,1]$  полиномы Лежандра [40,53-57,60-63] (либо полиномы Чебышёва [64]). Таким образом, редукционный подход к построению иерархических теорий оболочек высокого порядка идентичен методу ортогональных полиномов в задачах о дисперсии нормальных волн [1] и приводит к начально-краевой задаче динамики тонкого тела, обеспечивая моделирование криволинейных волноводов различной формы и решение нестационарных задач для оболочек (см. напр. монографию [53]).

Из представления Н.А. Кильчевского об оболочке как системе с редуцированным числом степеней свободы в направлении, нормальном базисной поверхности [31], иерархического подхода А.А. Амосова к построению теорий оболочек высшего порядка [29] и возможности распространения вариационного формализма аналитической динамики на континуальные системы [65] следует дальнейшее развитие иерархической теории оболочек как двумерных Лагранжевых систем. Модель оболочки [66-68] задается на двумерном многообразии, соответствующем некоторой гладкой базисной поверхности (в общем случае не срединной) конфигурационным пространством с переменными поля первого рода [65], определенными коэффициентами разложения вектора перемещения по биортогональной системе базисных функций нормальной координаты, поверхностной и контурной плотностями функционала Лагранжа, вытекающими из пространственной и граничной плотностей Лагранжиана в результате редукции; удержание  $N+1$  члена в частичной сумме порождает теорию  $N$ -го порядка [29,66]. Уравнения движения оболочки [66-68] являются уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы. Приложения теории  $N$ -го порядка к задачам о дисперсии нормальных волн в упругих системах рассмотрено в работах [69-79]. В статье [69] получена

<sup>‡</sup> The hierarchical models obtained in this way are capable of approximating the solution of the full, three-dimensional problem... in various norms, a feature not shared by models obtained from, for example, asymptotic expansion techniques.

формулировка спектральной задачи и показана сходимость решений в плоском упругом слое, полученных на базе теорий различного порядка, к точному решению задачи Рэлея-Лэмба [4] для частот запирающих распространяющихся мод нормальных волн, а в [71] – при некоторых характерных ненулевых значениях волнового числа. В работе [70] показана сходимость форм распространяющихся мод на частотах запирающих, вытекающих из приближенного решения, к точному решению [4] по норме евклидова пространства. В статье [72] исследовано явление т.н. «обратной волны» [4], т.е. второй дисперсионной ветви продольных мод в области отрицательных групповых скоростей, и показана достаточность теорий 6-7 порядков для его описания, а в [73] построены формы продольной волны в области  $c_g < 0$ . Следует заметить, что применение в общем случае биортогональных разложений и ковариантная формулировка уравнений движения теории оболочек  $N$ -го порядка [68] позволяет применять в качестве базиса, помимо ортогональных полиномов, также и финитные функции формы; в последнем случае приложение теории к задачам о дисперсии нормальных волн приводит к спектральной задаче, соответствующей полуаналитическому методу конечных элементов; сравнение сходимости решений, полученных на основе единой формулировки иерархической теории оболочек при использовании полиномиального и финитного базисов приведено в статье [78]. Таким образом, как метод ортогональных полиномов, так и метод полуаналитических конечных элементов являются частными случаями теории оболочек  $N$ -го порядка в классе задач о дисперсии нормальных волн в тонкостенных упругих волноводах.

Сходимость решения спектральной задачи зависит в том числе от удовлетворения условиям отражения волн на поверхностях волновода [4], т.е. от краевых условий на лицевых поверхностях оболочки. Вариационный формализм аналитической динамики континуальных систем позволяет обеспечить точное удовлетворение краевых условий, переносимых на базисную поверхность оболочки и рассматриваемых в качестве уравнений связей вариационной задачи [74]; уравнения движения строятся методом множителей Лагранжа [74,77]. Решение спектральной задачи в данном случае возможно как путем исключения множителей с переходом к вырожденной обобщенной спектральной задаче, так и на базе метода Голуба [80] решения задачи о стационарных значениях с ограничениями [75-77,79]. Сравнение решений при учете или пренебрежении связями, показывает заметное снижение эффектов запирающих в том случае, когда краевые условия на лицевых поверхностях удовлетворены точно [77].

Вариационная формулировка теории  $N$ -го порядка обеспечивает определение приведенных упругих постоянных материала волновода, неоднородного по толщине, как на основе численного интегрирования, так и в случае применения в качестве базиса систем ортогональных полиномов [18] аналитически с помощью рекуррентных соотношений (аналогично работам). Решение задачи о дисперсии волн в неоднородном функционально-градиентном слое получено в работах [78] (для слоя со степенным законом распределения объемных долей структурных составляющих по толщине плоского волновода симметричной структуры) и [76] (для слоя несимметричной структуры), исследована сходимость решения спектральной задачи по частотам запирающих, построены профили компонентов тензора напряжения, соответствующие формам нормальных волн, при нулевом волновом числе [79].

Таким образом, показано, что «трехмерная» теория оболочек  $N$ -го порядка является основой для решения задач о дисперсии распространяющихся волн в упругих неоднородных волноводах, обеспечивая вполне удовлетворительную сходимость решения при использовании как ортогонального полиномиального базиса, так и финитных функций формы на базе единого формализма. Однако полное решение задач о дисперсии волн требует описания не только исследованных в цитируемых выше работах распространяющихся мод (соответствующих действительным собственным значениям, определяемым спектральной задачей, квадратичной как относительно фазовой частоты, так и волнового числа), но и затухающих мод (соответствующих как мнимым, так и комплексным собственным значениям). Такие решения на базе теории оболочек  $N$ -го порядка до сих пор получены не были. Вычисление комплексных собственных значений возможно при переходе к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа при рассмотрении фазовой частоты как параметра. В известных работах такой переход осуществляется а posteriori путем замены переменной. В то же время Лагранжев формализм аналитической динамики континуальных систем позволяет, применяя преобразование Лежандра, естественным образом построить системы уравнений, разрешенных относительно производных первого порядка по одной из пространственных переменных и тем самым получить требуемую формулировку спектральной задачи, линейной относительно волнового числа; при этом вводимые новые переменные имеют физический смысл обобщенных усилий. Данный подход схож с квази-Гамильтоновым формализмом [81-85], однако отличается от метода решения задач о дисперсии волн, основанного на формализме фазового пространства [86-92]. В самом деле, работы [81,82] посвящены решению пространственных задач статики упругих тел (криволинейных призматических стержней [81,82], ортотропных и анизотропных упругих и пьезоупругих пластин [83,84] и трансверсально-изотропных цилиндров [85]) путем преобразования функционала Лагранжа по частным производным, соответствующим некоторой выбранной координате. Доказываются симплектические свойства полученных в результате преобразования матричных операторов системы разрешающих уравнений, и строятся решения соответствующих спектральных задач. В работах [86-92] в качестве выделенной рассматривается трансверсальная координата; задача, тем не менее, сводится к одному векторному уравнению в производных второго порядка по данной координате; для решения данного уравнения далее применяется разложение неизвестной в обобщенный ряд Фурье по полиномам Лежандра, тогда как дальнейшее преобразование к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа, осуществляется аналогично работам [21-28]. Согласно терминологии авторов [81-82], полученные уравнения первого порядка именуются Гамильтоновыми; ниже используется терминология Н.А. Кильчевского [65], в соответствии с которой квазиканоническими гамильтоновыми именуются уравнения не содержащие пространственных или временных производных выше первого порядка. В данной статье описано построение смешанного вариационного функционала для произвольной ортотропной оболочки на базе общей формулировки функционала Лагранжа теории оболочек  $N$ -го порядка и уравнений, являющихся условиями его экстремали и разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка по одной из координат на двумерном многообразии. Данные уравнения, содержащие производные второго порядка по времени и второй криволинейной

координате, в определенном смысле аналогичны известным уравнениям Рауса аналитической механики. Рассмотрено приложение уравнений Рауса к решению задачи о дисперсии распространяющихся и затухающих волн в упругом слое; показана сходимость решения для дисперсионных ветвей, соответствующих мнимым волновым числам.

## 1. ТРЕХМЕРНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ДИНЕМИКИ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

### 1.1. Основные геометрические соотношения.

Геометрической моделью оболочки, как двумерного континуума [66,68], является гладкое двумерное многообразие  $S$  с определенными на нем криволинейными координатами  $\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$  [55]. Здесь и далее, где не указано иное, греческие индексы пробегает значения 1,2. Касательное расслоение  $TS$

$$TS = \coprod_{M \in S} T_M S, \quad T_M S = \{d\xi^\alpha \mathbf{r}_\alpha : \mathbf{r}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad d\xi^\alpha \in \mathbb{R}^2\}, \quad \partial_\alpha \equiv \partial/\partial \xi^\alpha; \quad (1.1)$$

задано полями векторов  $\mathbf{r}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  ковариантного базиса;  $\forall M \in S \quad \mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(\xi^\alpha)$  – радиус-вектор, оснащено метрикой  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$ ,  $a = \det(a_{\alpha\beta})$  [68,93]; далее всюду принято правило Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу. Нормальное расслоение  $NS$  многообразия  $S$  определено так [93]

$$NS = \coprod_{M \in S} N_M S, \quad N_M S = \{d\zeta \mathbf{n} : \mathbf{n} = \mathbf{r}^1 \wedge \mathbf{r}^2, \quad d\zeta \in \mathbb{R}\}, \quad (1.2)$$

здесь и далее символами « $\cdot$ » и « $\wedge$ » обозначены скалярное и векторное произведения,  $\mathbf{r}^\alpha = a^{\alpha\gamma} \mathbf{r}_\gamma$ ,  $a^{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta$ . Ковариантные компоненты тензора кривизны  $S$ , определенные соотношениями Вайнгартена  $b_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\beta$ ;  $c_{\alpha\beta} = b^\gamma_\alpha b_{\gamma\beta}$  – компоненты тензора третьей квадратичной формы. Векторные поля Ковариантное дифференцирование на  $TS$  далее обозначено символом  $\bar{\nabla}_\alpha$ . Для произвольного векторного поля на  $TS \oplus NS$  справедлива запись  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + u^3 \mathbf{n}$ .

Моделью оболочки как трехмерного тела является многообразие  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{V} = V \cup \partial V$ ,  $\partial V = S_\pm + S_B$ , где  $S_\pm$  – лицевые поверхности оболочки,  $S_B$  – ее боковая поверхность. Пусть  $S$  – базовая поверхность  $\bar{V}$ , т.е.  $\xi^\alpha, \zeta \in [-1, 1]$  – нормально связанная с  $S$  пространственная система криволинейных координат [40], такая, что  $\forall M' \in \bar{V} \quad \mathbf{R}(M') = \mathbf{r}(\xi^\alpha) + h\zeta \mathbf{n}(\xi^\alpha)$  [68], где  $h$  – толщина оболочки (предположим далее  $h \neq h(\xi^\alpha)$ ). Расслоение многообразия  $V$  определено следующим образом

$$TV = \coprod_{M' \in V} T_{M'} V, \quad (1.3)$$

$$T_{M'} V = \{d\xi^\alpha \mathbf{R}_\alpha + d\zeta \mathbf{n} : \mathbf{R}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{R}, \quad d\xi^\alpha \in \mathbb{R}^2, \quad d\zeta \in \mathbb{R}\};$$

для произвольного векторного поля на  $TV$  справедлива запись  $\mathbf{u} = \hat{u}^\alpha \mathbf{R}_\alpha + u^3 \mathbf{n}$ . Базисы  $TV$  и  $TS \oplus NS$  связаны уравнениями параллельного переноса [40]

$$\mathbf{R}_\alpha = A^\beta_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{R}^\alpha = A^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta; \quad \mathbf{r}_\alpha = A^\beta_\alpha \mathbf{R}_\beta, \quad \mathbf{r}^\alpha = A^\alpha_\beta \mathbf{R}^\beta; \quad A^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - h\zeta b^\beta_\alpha, \quad (1.4)$$

$$A_{\alpha}^{\beta} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ (1 - 2h\zeta H) \delta_{\alpha}^{\beta} + h\zeta b_{\alpha}^{\beta} \right], \quad \sqrt{\frac{a}{g}} = 1 - 2h\zeta H + h^2 \zeta^2 K,$$

$K = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha}$ ,  $H = \det(b_{\alpha}^{\beta})$ ,  $A_{\alpha}^{\beta}$ ,  $A_{\alpha}^{\beta}$  являются компонентами тензоров  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$  [93]

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}_{\beta} \mathbf{r}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta} \mathbf{R}^{\alpha} + \mathbf{nn};$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{R}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta} \mathbf{R}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}_{\beta} \mathbf{r}^{\alpha} + \mathbf{nn},$$

аналогичных градиентам места в нелинейной теории упругости [94]

$$\mathbf{A} : TS \oplus NS \rightarrow TV, \quad \mathbf{A} : T^*V \rightarrow T^*S \oplus NS;$$

$$\mathbf{A}^{-1} : T^*S \oplus NS \rightarrow T^*V, \quad \mathbf{A}^{-1} : TV \rightarrow TS \oplus NS.$$

(1.5)

Здесь введены обозначения кокасательных расслоений  $T^*S$  и  $T^*V$

$$T^*S = \coprod_{M \in S} T_M^*S, \quad T_M^*S = \{ \beta_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} : \beta_{\alpha} \in \mathbb{R}^2 \};$$

$$T^*V = \coprod_{M' \in V} T_{M'}^*V, \quad T_{M'}^*V = \{ \beta_{\alpha} \mathbf{R}^{\alpha} + d\zeta \mathbf{n} : \beta_{\alpha} \in \mathbb{R}^2 \}.$$

## 1.2. Кинематика деформирования оболочки как трехмерного тела.

Пусть  $\mathbf{u}(M, \zeta, t)$  – поле вектора перемещения, являющегося в терминах Лагранжевой механики континуальных систем [65] переменной поля I рода

$$u_{\beta} \mathbf{R}^{\beta} + u_3 \mathbf{n} = \mathbf{u}(\xi^{\alpha}, \zeta, t) : V \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow T^*V \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}). \quad (1.6)$$

В силу (1.1), (1.2), (1.3) и (1.5) существует биективное отображение [93]

$$T^*V = T^*S \oplus NS \times [-1, 1], \quad (1.7)$$

и поле вектора перемещения (1.6) может быть задано на  $T^*S \oplus NS \times [-1, 1]$

$$\begin{aligned} u_{\beta} \mathbf{r}^{\beta} + u_3 \mathbf{n} &= \mathbf{u} : S \times [-1, 1] \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow \\ &\rightarrow T^*S \oplus NS \times \mathcal{H}[-1, 1] \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

т.е. переменная поля первого рода определена в базисе  $\mathbf{r}^{\alpha}, \mathbf{n}$ , не зависящем от  $\zeta$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{u}$  на  $T^*S \oplus NS$  и на  $T^*V$  связаны соотношениями (1.9)

$$\hat{u}_{\gamma} = A_{\gamma}^{\alpha} u_{\alpha}, \quad u_{\alpha} = A_{\alpha}^{\gamma} \hat{u}_{\gamma}. \quad (1.9)$$

Введем вектор квазиперемещения  $\mathbf{U}$ , определенный следующим образом

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} = \hat{u}_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} + u_3 \mathbf{n}. \quad (1.10)$$

Пусть  $\nabla = \mathbf{R}^{\alpha} \partial_{\alpha} + \mathbf{n} \partial_{\zeta}$  – оператор «набла» на  $TV$  [68]; с учетом (1.8) тензор дисторсии  $\mathbf{d} = \nabla \otimes \mathbf{u}$  записывается в двухточечном представлении [66]

$$\mathbf{d} : S \times D_{\zeta} \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow T^*V \otimes (T^*S \oplus NS) \times \mathcal{H}[-1, 1] \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$$

$$\mathbf{d} = (\mathbf{R}^{\alpha} \partial_{\alpha} + \mathbf{n} \partial_{\zeta}) \otimes (u_{\beta} \mathbf{r}^{\beta} + u_3 \mathbf{n}) = \bar{d}_{\alpha\beta} \mathbf{R}^{\alpha} \mathbf{r}^{\beta} + \bar{d}_{\alpha 3} \mathbf{R}^{\alpha} \mathbf{n} + \bar{d}_{3\beta} \mathbf{n} \mathbf{r}^{\beta} + \bar{d}_{33} \mathbf{nn}; \quad (1.11)$$

$$\bar{d}_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} u_{\beta} - b_{\alpha\beta} u_3, \quad \bar{d}_{\alpha 3} = \nabla_{\alpha} u_3 + b_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}; \quad \bar{d}_{3\beta} = \partial_{\zeta} u_{\beta}, \quad \bar{d}_{33} = \partial_{\zeta} u_3. \quad (1.12)$$

С другой стороны, с учетом (1.4) тензор дисторсии может быть записан так

$$\mathbf{d} = \hat{d}_{\gamma\beta} \mathbf{R}^{\beta} \mathbf{R}^{\gamma} + \hat{d}_{3\beta} \mathbf{R}^{\beta} \mathbf{n} + \hat{d}_{\gamma 3} \mathbf{n} \mathbf{R}^{\gamma} + \hat{d}_{33} \mathbf{nn}, \quad (1.13)$$

$$\hat{d}_{\gamma\beta} = A_{\gamma}^{\alpha} \bar{d}_{\alpha\beta}; \quad \hat{d}_{3\beta} = \bar{d}_{3\beta}; \quad \hat{d}_{\gamma 3} = A_{\gamma}^{\alpha} \bar{d}_{\alpha 3}; \quad \hat{d}_{33} = \bar{d}_{33}. \quad (1.14)$$

Линейный тензор пространственной деформации оболочки  $\mathbf{e} = \frac{1}{2} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T$  определяется с учетом (1.13), (1.12) и (1.14) следующим образом



$$\begin{aligned}\bar{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\beta \hat{u}_\alpha + \bar{\nabla}_\alpha \hat{u}_\beta) - \hat{u}_\delta A_\gamma^{\delta\cdot} \bar{\nabla}_\beta A_\alpha^\gamma - A_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma} u_3; \\ \bar{e}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\alpha u_3 + h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_\alpha) + A_\gamma^{\delta\cdot} b_\alpha^\gamma \hat{u}_\delta; \quad e_{33} = h^{-1} \partial_\zeta u_3,\end{aligned}\quad (1.15)$$

где  $\bar{\nabla}_\beta \hat{u}_\gamma$  – ковариантные производные компонентов вектора  $\mathbf{U}$  (1.10).

### 1.3. Вариационная формулировка задачи динамики оболочки как трехмерного упругого тела на основе функционала Лагранжа и обобщенного функционала Рауса.

Динамика оболочки описывается принципом Гамильтона-Остроградского

$$\delta H = 0, \quad H = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_V \mathcal{L}_V dV + \int_{\partial V} \mathcal{L}_{\partial V} dS \right) dt. \quad (1.16)$$

Здесь  $\mathcal{L}_V$  – пространственная плотность функционала Лагранжа,  $\mathcal{L}_{\partial V} = \mathcal{L}_\pm + \mathcal{L}_B$  – его граничная плотность (здесь и далее принято обозначение  $\dot{u} \equiv \partial u / \partial t$ )

$$\mathcal{L}_V = \frac{1}{2} \rho \hat{u}_i \dot{\hat{u}}^i - \frac{1}{2} \hat{C}^{ijpq} \bar{e}_{ij} \bar{e}_{pq} + \rho \hat{F}^i \hat{u}_i, \quad i, j, p, q = 1, 2, 3; \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_\pm = \hat{q}_\pm^\alpha \hat{u}_\alpha|_{S_\pm} + \hat{q}_\pm^3 u_3|_{S_\pm}; \quad \mathcal{L}_B = \hat{q}_B^\alpha \hat{u}_\alpha|_{S_B} + \hat{q}_B^3 u_3|_{S_B}; \quad (1.18)$$

контравариантные компоненты  $\hat{C}^{ijpq}$  тензора упругих констант  $\hat{\mathbf{C}}$ , также как и компоненты главного вектора внешних сил  $\rho \mathbf{F}$  отнесены к базису  $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}$

$$\rho \hat{\mathbf{F}} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} = \rho (\hat{F}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + F^3 \mathbf{n}), \quad \hat{\mathbf{q}}_B = \mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = \hat{q}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + q^3 \mathbf{n}.$$

Вариационную постановку задачи динамики (1.16) замыкают начальные условия

$$\hat{u}_\alpha|_{t=t_0} = \hat{u}_\alpha^0; \quad u_3|_{t=t_0} = u_3^0; \quad \hat{u}_\alpha|_{t=t_0} = \hat{v}_\alpha^0; \quad u_3|_{t=t_0} = v_3^0. \quad (1.19)$$

Принимая во внимание (1.15), приведем плотность  $\mathcal{L}_V$  (1.17) к виду

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\hat{u}_\alpha, u_3, \hat{u}_\alpha, \dot{\hat{u}}_\alpha, \bar{\nabla}_\beta \hat{u}_\alpha, \bar{\nabla}_\beta u_3) &= \frac{1}{2} \rho (\dot{\hat{u}}_\alpha \dot{\hat{u}}^\alpha + \dot{u}_3 \dot{u}^3) + \rho (\hat{F}^\alpha \hat{u}_\alpha + F^3 u_3) - \\ &- \left[ \frac{1}{2} \hat{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\gamma \hat{u}_\delta + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\delta \hat{u}_\gamma - \hat{u}_\nu A_\mu^{\nu\cdot} \bar{\nabla}_\delta A_\gamma^\mu - A_\gamma^\mu b_{\delta\mu} u_3 \right) + \hat{C}^{\alpha\beta 33} h^{-1} \partial_\zeta u_3 \right] \times \\ &\times \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\beta \hat{u}_\alpha + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha \hat{u}_\beta - \hat{u}_\varepsilon A_\lambda^{\varepsilon\cdot} \bar{\nabla}_\beta A_\alpha^\lambda - A_\alpha^\lambda b_{\beta\lambda} u_3 \right) - \frac{1}{2} \hat{C}^{3333} h^{-2} \partial_\zeta u_3 \partial_\zeta u_3 - \\ &- \hat{C}^{\alpha 3 \beta 3} \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha u_3 + \frac{1}{2} h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_\alpha + A_\gamma^{\delta\cdot} b_\alpha^\gamma \hat{u}_\delta \right) \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\beta u_3 + \frac{1}{2} h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_\beta + A_\lambda^{\varepsilon\cdot} b_\beta^\lambda \hat{u}_\varepsilon \right).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Таким образом, лагранжева модель оболочки в трехмерном представлении задана конфигурационным пространством  $\Omega^3 = \{\mathbf{U}\}$ , пространственной (1.20) и поверхностной (1.18) плотностями функционала Лагранжа. Выделим далее одну из координат на  $S$  (напр.,  $\xi^1$ ) и введем обобщенные напряжения на основе (1.20)

$$\bar{\sigma}^{1\alpha} = -\partial \mathcal{L}_V / \partial (\bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha); \quad \bar{\sigma}^{13} = -\partial \mathcal{L}_V / \partial (\bar{\nabla}_1 u_3). \quad (1.21)$$

Учитывая соотношения Петерсона-Кодацци и (1.4), из (1.21) получим

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{11} &= \hat{C}^{1111} (\bar{\nabla}_1 \hat{u}_1 - \hat{u}_\alpha A_\beta^{\alpha\cdot} \bar{\nabla}_1 A_1^\beta - A_1^\beta b_{1\beta} u_3) + \\ &+ \hat{C}^{1122} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - \hat{u}_\alpha A_\beta^{\alpha\cdot} \bar{\nabla}_2 A_2^\beta - A_2^\beta b_{2\beta} u_3) + \hat{C}^{1133} h^{-1} \partial_\zeta u_3;\end{aligned}\quad (1.22)$$

$$\bar{\sigma}^{12} = \hat{C}^{1212} (\bar{\nabla}_1 \hat{u}_2 + \bar{\nabla}_2 \hat{u}_1 - 2 \hat{u}_\alpha A_\beta^{\alpha\cdot} \bar{\nabla}_1 A_2^\beta - 2 A_1^\beta b_{2\beta} u_3); \quad (1.23)$$

$$\bar{\sigma}^{13} = \hat{C}^{1313} (\bar{\nabla}_1 u_3 + h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_1 + 2 A_\gamma^{\delta\cdot} b_1^\gamma \hat{u}_\delta). \quad (1.24)$$

Определяющие уравнения (1.22)-(1.24) разрешимы относительно производных  $\bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  и  $\bar{\nabla}_1 u_3$ ; обратные определяющие уравнения имеют вид

$$\bar{\nabla}_1 \hat{u}_1 = \frac{\hat{\sigma}^{11}}{\hat{C}^{1111}} - \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - \hat{u}_\alpha A_\beta^\alpha \bar{\nabla}_2 A_2^\beta - A_1^\beta b_{2\beta} u_3) - \frac{\hat{C}^{1133}}{\hat{C}^{1111}} h^{-1} \partial_\zeta u_3 + \hat{u}_\alpha A_\beta^\alpha \bar{\nabla}_1 A_1^\beta + A_1^\beta b_{1\beta} u_3; \quad (1.25)$$

$$\bar{\nabla}_1 \hat{u}_2 = \frac{\hat{\sigma}^{12}}{\hat{C}^{1212}} - \bar{\nabla}_2 \hat{u}_1 + 2 \hat{u}_\alpha A_\beta^\alpha \bar{\nabla}_1 A_2^\beta + 2 A_1^\beta b_{2\beta} u_3; \quad (1.26)$$

$$\bar{\nabla}_1 u_3 = \frac{\hat{\sigma}^{13}}{\hat{C}^{1313}} - h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_1 - 2 A_\gamma^\delta b_{1\gamma} \hat{u}_\delta. \quad (1.27)$$

Осуществляя преобразование Лежандра плотности функционала Лагранжа (1.20) по  $\bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  и  $\bar{\nabla}_1 u_3$ , получим плотности смешанного функционала  $\mathcal{R}_v$

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}^{11} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_1 + \hat{\sigma}^{12} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_2 + \hat{\sigma}^{13} \bar{\nabla}_1 u_3 + \mathcal{L}_v = \mathcal{R}_v(\hat{\sigma}^{1\alpha}, \hat{\sigma}^{13}, \hat{u}_\alpha, u_3, \hat{u}_\alpha, \dot{u}_\alpha, \bar{\nabla}_2 \hat{u}_\alpha, \bar{\nabla}_2 u_3) = \\ & = \frac{1}{2} \rho [\dot{\hat{u}}_\alpha \dot{\hat{u}}^\alpha + \dot{u}_3^2] + \rho (\hat{F}^\alpha \hat{u}_\alpha + F^3 u_3) + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\hat{\sigma}^{11})^2}{\hat{C}^{1111}} + \frac{(\hat{\sigma}^{12})^2}{\hat{C}^{1212}} + \frac{(\hat{\sigma}^{13})^2}{\hat{C}^{1313}} \right] - \\ & - \hat{\sigma}^{11} \left[ \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 + \frac{\hat{C}^{1133}}{\hat{C}^{1111}} h^{-1} \partial_\zeta u_3 \right) - \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_2 A_2^\gamma + A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_1 A_1^\gamma \right) \hat{u}_\delta - \right. \\ & - \left. \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} A_2^\gamma b_{2\gamma} + A_1^\gamma b_{1\gamma} \right) u_3 \right] - \hat{\sigma}^{12} [\bar{\nabla}_2 \hat{u}_1 - 2 (A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_1 A_2^\gamma \hat{u}_\delta + A_2^\gamma b_{1\gamma} u_3)] - \\ & - \hat{\sigma}^{13} (h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_1 + 2 A_\gamma^\delta b_{1\gamma} \hat{u}_\delta) - \frac{1}{2} \tilde{C}^{2222} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_2 A_2^\gamma \hat{u}_\delta - A_2^\gamma b_{2\gamma} u_3)^2 - \\ & - \tilde{C}^{2233} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_2 A_2^\gamma \hat{u}_\delta - A_2^\gamma b_{2\gamma} u_3) h^{-1} \partial_\zeta u_3 - \frac{1}{2} \tilde{C}^{3333} h^{-2} (\partial_\zeta u_3)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \tilde{C}^{2323} \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_2 u_3 + \frac{1}{2} h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_2 + A_\gamma^\delta b_{2\gamma} \hat{u}_\delta \right)^2, \\ & \mathcal{R}_\pm = \hat{q}_\pm^\alpha \hat{u}_\alpha|_{S_\pm} + q_\pm^3 u_3|_{S_\pm}, \mathcal{R}_B = \hat{q}_B^\alpha \hat{u}_\alpha|_{S_B} + q_B^3 u_3|_{S_B}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

где использованы следующие обозначения обобщенных упругих констант

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{2222} &= \hat{C}^{2222} \left[ 1 - \frac{(\hat{C}^{1122})^2}{\hat{C}^{1111} \hat{C}^{2222}} \right]; \quad \tilde{C}^{3333} = \hat{C}^{3333} \left[ 1 - \frac{(\hat{C}^{1133})^2}{\hat{C}^{1111} \hat{C}^{3333}} \right]; \\ \tilde{C}^{2233} &= \hat{C}^{2233} \left[ 1 - (\hat{C}^{1122} \hat{C}^{1133}) / (\hat{C}^{1111} \hat{C}^{2233}) \right]. \end{aligned}$$

Соотношения (1.28) и (1.29), таким образом, определяют преобразование Лежандра функционала Лагранжа по ковариантным производным переменных поля первого рода по координате  $\xi^1$ , т.е. задают функционал на пространстве  $\Psi_1^3 = \{\mathbf{U}, \mathbf{s}^1\}$  состояний системы, где  $\mathbf{s} = \hat{\sigma}^{1\alpha} \mathbf{r}_\alpha + \hat{\sigma}^{13} \mathbf{n}$  – вектор квазинапряжения

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{1\alpha} \mathbf{r}_\alpha + \hat{\sigma}^{13} \mathbf{n} = \mathbf{s} : S \times [-1, 1] \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow \\ \rightarrow (TS \oplus NS) \times \mathcal{H}[-1, 1] \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

В работах [81-85] функционал, полученных аналогичным образом для задач статики призматического стержня или цилиндра, назван гамильтонианом, а уравнения, являющиеся условиями его стационарности – гамильтоновыми.

Следуя терминологии [65], а также [95], под гамильтонианом будем понимать функционал, полученный в результате преобразования Лежандра функционала Лагранжа по всем пространственным и временным производным переменных поля первого рода. Полученный выше функционал аналогично (1.28), (1.29) представляется в определенном смысле аналогичным функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем [96]. С учетом (1.28) и (1.29) принцип Гамильтона-Остроградского (1.16) записывается следующим образом

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V (\mathcal{R}_V - \bar{\sigma}^{1\alpha} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha - \bar{\sigma}^{13} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_3) dV + \int_{S_\pm} \mathcal{R}_\pm dS_\pm + \int_{S_B} \mathcal{R}_B dS_B \right] dt. \quad (1.31)$$

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

Введем на гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}[-1,1]$  базисную систему  $p_{(k)}(\zeta)$ ,  $\zeta \in [-1,1]$ , вообще говоря, биортогональную, так что  $\mathcal{H}[-1,1] = \{p_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$

$$\begin{aligned} \exists p^{(m)}(\zeta): \quad (p_{(k)}, p^{(m)})_1 &\equiv \int_{-1}^1 p_{(k)}(\zeta) p^{(m)}(\zeta) d\zeta = \delta_{(k)}^{(m)}; \\ G_{(km)} &= (p_{(k)}, p_{(m)})_1, \quad G^{(nm)} G_{(km)} = \delta_{(k)}^{(m)}; \quad p^{(m)} = G^{(nm)} p_{(k)}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее к латинским индексам, заключенным в скобки и пробегающим значения, принадлежащие  $\mathbb{R} \cup \{0\}$ , применяется правило Эйнштейна.

Предполагая  $\hat{u}_\alpha(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ ,  $u_3(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ ,  $\bar{\sigma}^{1\alpha}(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ ,  $\bar{\sigma}^{13}(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ , определим  $\hat{u}_\alpha$ ,  $u_3$  их коэффициентами разложения Фурье по базису  $p_{(k)}(\zeta)$  (2.1)

$$\begin{aligned} \hat{u}_\alpha(\xi^\beta, \zeta, t) &= \hat{u}_\alpha^{(k)}(\xi^\beta, t) p_{(k)}(\zeta), \quad \hat{u}_\zeta^{(k)}(\xi^\beta, t) = (\hat{u}_\alpha, p^{(k)})_1; \\ u_3(\xi^\beta, \zeta, t) &= u_3^{(k)}(\xi^\beta, t) p_{(k)}(\zeta), \quad u_3^{(k)}(\xi^\alpha, t) = (u_3, p^{(k)})_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

тогда как  $\bar{\sigma}^{1\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}^{13}$  зададим их моментами относительно базиса  $p^{(k)}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{1\alpha}(\xi^\beta, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{a}{g}} \bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}(\xi^\beta, t) p^{(k)}(\zeta), \quad \bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}(\xi^\beta, t) = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{\sigma}^{1\alpha}, p_{(k)} \right)_1; \\ \bar{\sigma}^{13}(\xi^\beta, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{a}{g}} \bar{\sigma}_{(k)}^{13}(\xi^\beta, t) p^{(k)}(\zeta), \quad \bar{\sigma}_{(k)}^{13}(\xi^\beta, t) = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{\sigma}^{13}, p_{(k)} \right)_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом (2.2), (2.3) и (2.4) пространственная (1.28) и граничная (1.29) плотности обобщенного функционала Рауса преобразуются к виду (2.5) и (2.6)

$$\begin{aligned} \int_V \mathcal{R}_V dV &= \int_S h dS \int_{-1}^1 \mathcal{R}_V \sqrt{g/ad} d\zeta: \\ \mathcal{R}_S(\bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}, \bar{\sigma}_{(k)}^{13}, \hat{u}_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \partial_t \hat{u}_\alpha^{(k)}, \partial_t u_3^{(k)}, \bar{\nabla}_2 \hat{u}_\alpha^{(k)}, \bar{\nabla}_2 u_3^{(k)}) &= \\ &= \frac{1}{2} \rho_{(k)}^{(m)} (\dot{\hat{u}}_\alpha^{(k)} \dot{\hat{u}}_{(m)}^\alpha + \dot{u}_3^{(k)} \dot{u}_{(m)}^3) + \hat{F}_{(k)}^\alpha \hat{u}_\alpha^{(k)} + F_{(k)}^3 u_3^{(k)} + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{(k)}^{1\lambda} B_{1\lambda 1\mu}^{(km)} \bar{\sigma}_{(m)}^{1\mu} - \bar{\sigma}_{(k)}^{11} \left[ K_{11(m)}^{22(k\cdot)} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} - \right. \\ &\left. - \left( \bar{K}_{11(m)}^{\alpha(k\cdot)} + \bar{A}_{11(m)}^{\alpha(k\cdot)} \right) \hat{u}_\alpha^{(m)} - \left( b_{2\beta} \bar{K}_{11(m)}^{\beta(k\cdot)} + b_{1\beta} \bar{A}_{11(m)}^{\beta(k\cdot)} - h^{-1} K_{11(n)}^{33(k\cdot)} D_{(m\cdot)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] - \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\sigma}_{(k)}^{12} \left[ \bar{\nabla}_2 \hat{u}_1^{(k)} - 2\bar{A}_{12(m)}^{\alpha(k)} \hat{u}_\alpha^{(m)} + 2b_{1\beta} \bar{A}_{12(m)}^{\beta(k)} u_3^{(m)} \right] - \\
& -\bar{\sigma}_{(k)}^{13} \left( h^{-1} D_{(m)}^{(k)} \hat{u}_1^{(m)} + 2b_{1\beta} \bar{A}_{13\beta(m)}^{\alpha(k)} \hat{u}_\alpha^{(m)} \right) - \\
& -\frac{1}{2} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(k)} \left[ \bar{C}_{(km)}^{2222} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} - 2\bar{C}_{(km)}^{22,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} - 2 \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - h^{-1} \bar{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] - \\
& -\frac{1}{2} \hat{u}_\alpha^{(k)} \left[ \left( \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} + b_2^\gamma b_2^\delta \bar{C}_{\gamma\delta(km)}^{\alpha\beta} \right) \hat{u}_\beta^{(m)} + 2 \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} - h^{-1} \bar{C}_{(kn)}^{33,\alpha} D_{(m)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] - \\
& -\frac{1}{2} h^{-1} D_{(k)}^{(l)} u_3^{(k)} \left( h^{-1} \bar{C}_{(ln)}^{3333} D_{(m)}^{(n)} - b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{33,\beta} - b_{2\alpha} b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} \right) u_3^{(m)} - \\
& -\frac{1}{2} \left[ \bar{C}_{(km)}^{2323} \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(k)} + h^{-1} D_{(l)}^{(k)} \hat{u}_2^{(l)} \right) + 2b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} \right] \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(n)}^{(m)} \hat{u}_2^{(n)} \right), \\
& \mathcal{R}_\Gamma \left( \hat{u}_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)} \right) = \hat{q}_{\Gamma(k)}^\alpha \hat{u}_\alpha^{(k)} \Big|_\Gamma + q_{B(k)}^3 u_3^{(k)} \Big|_\Gamma, \tag{2.6}
\end{aligned}$$

где  $k, m, n, \dots \in [0, N] \cap \mathbb{Z}$ , (2.5) – поверхностная, (2.6) – контурная плотности функционала теории оболочек  $N$ -го порядка [68]. Вариационная постановка начально-краевой задачи динамики оболочки вытекает из принципа Гамильтона-Остроградского (2.7) при начальных условиях (1.19), приведенных к виду (2.8)

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_S \left( \mathcal{R}_S - \bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha^{(k)} - \bar{\sigma}_{(k)}^{13} \bar{\nabla}_1 u_3^{(k)} \right) dS + \int_{\partial S} \mathcal{R}_\Gamma d\Gamma \right] dt; \tag{2.7}$$

$$\hat{u}_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = \hat{u}_\alpha^{(k)0}; \quad u_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = u_3^{(k)0}; \quad \dot{\hat{u}}_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = \dot{\hat{u}}_\alpha^{(k)0}; \quad \dot{u}_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = \dot{u}_3^{(k)0}. \tag{2.8}$$

Здесь и далее использованы следующие обозначения

$$\hat{F}_{(k)}^\alpha = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{F}^\alpha, p_{(k)} \right)_1 + \hat{q}_+^\alpha - (-1)^k \hat{q}_-^\alpha; \quad F_{(k)}^3 = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} F^3, p_{(k)} \right)_1 + q_+^3 - (-1)^k q_-^3$$

– компоненты главного вектора внешних сил на моделирующей поверхности  $S$ ;

$$\rho_{(m)}^{(k)} = h \left( \sqrt{g/a} \rho^{(k)}, p_{(m)} \right)_1$$

– обобщенные моменты инерции модели оболочки  $N$ -го порядка;

$$B_{1\lambda 1\mu}^{(km)} = h^{-1} \left( \sqrt{a/g} \left( \bar{C}^{1\lambda 1\mu} \right)^{-1} p^{(k)}, p_{(m)} \right)_1$$

– коэффициенты податливости модели оболочки  $N$ -го порядка;

$$K_{11(m)}^{22(k)} = \left( \frac{\bar{C}^{1122}}{\bar{C}^{1111}} p^{(k)}, p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{K}_{12(m)}^{12(k)} = \delta_{(m)}^{(k)}; \quad K_{11(m)}^{33(k)} = \left( \frac{\bar{C}^{1133}}{\bar{C}^{1111}} p^{(k)}, p_{(m)} \right)_1;$$

$$\bar{K}_{11(m)}^{\alpha(k)} = \left( \frac{\bar{C}^{11\lambda\mu}}{\bar{C}^{1111}} p^{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_{\lambda} A_{\mu}^{\gamma} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{K}_{11(m)}^{\mu, \alpha(k)} = \left( \frac{\bar{C}^{11\lambda\mu}}{\bar{C}^{1111}} p^{(k)}, A_{\lambda}^{\alpha} p_{(m)} \right)_1;$$

$$\bar{K}_{12(m)}^{\alpha(k)} = \left( p^{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_{\lambda} A_{\mu}^{\gamma} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{K}_{12(m)}^{\gamma(k)} = \left( p^{(k)}, A_2^{\gamma} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{K}_{13, \gamma(m)}^{\alpha(k)} = \left( p^{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} p_{(m)} \right)_1$$

– безразмерные коэффициенты;

$$\bar{C}_{(km)}^{22, \alpha} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{C}^{2222} p_{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_2 A_2^{\gamma} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{C}_{(km)}^{22, \beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{C}^{2222} p_{(k)}, A_2^{\beta} p_{(m)} \right)_1;$$

$$\bar{C}_{(km)}^{33, \alpha} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{C}^{2233} p_{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_2 A_2^{\gamma} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{C}_{(km)}^{33, \beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{C}^{2233} p_{(k)}, A_2^{\beta} p_{(m)} \right)_1;$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\gamma(km)}^{23,\alpha} &= h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2323} p_{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{\bar{C}}_{\gamma\delta(km)}^{\alpha\beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2323} A_{\gamma}^{\alpha} p_{(k)}, A_{\delta}^{\beta} p_{(m)} \right)_1; \\ \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} &= h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2222} A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_2 A_{2\gamma}^{\beta} p_{(k)}, A_{2\gamma}^{\beta} p_{(m)} \right)_1; \quad \bar{\bar{C}}_{(km)}^{\alpha\beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2222} A_{2\gamma}^{\alpha} p_{(k)}, A_{2\gamma}^{\beta} p_{(m)} \right)_1; \\ \bar{\bar{C}}_{(km)}^{\alpha\beta} &= h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2222} A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_2 A_{2\gamma}^{\beta} p_{(k)}, A_{\delta}^{\beta} \bar{\nabla}_2 A_{2\delta}^{\alpha} p_{(m)} \right)_1\end{aligned}$$

– коэффициенты жесткости,  $D_{(k\cdot)}^{(\cdot m)} = (\partial_{\zeta} p_{(k)}, p_{(m)})_1$ .

Условием  $\delta H = 0$  экстремали действия по Гамильтону (2.7) являются уравнения в общем виде (2.9) и (2.10)

$$\bar{\nabla}_1 \hat{u}_{\alpha}^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \hat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}}; \quad \bar{\nabla}_1 u_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \hat{\sigma}_{(k)}^{13}}, \quad k \in [0, N] \cap \mathbb{Z}; \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \hat{u}_{\alpha}^{(k)}} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial (\partial_t \hat{u}_{\alpha}^{(k)})} + \bar{\nabla}_2 \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \bar{\nabla}_2 \hat{u}_{\alpha}^{(k)}}; \\ \bar{\nabla}_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{13} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial u_3^{(k)}} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial (\partial_t \hat{u}_3^{(k)})} + \bar{\nabla}_2 \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \bar{\nabla}_2 \hat{u}_3^{(k)}};\end{aligned} \quad (2.10)$$

именуемые обобщенными уравнениями Рауса двумерной континуальной системы, и естественные краевые условия (2.11);  $v_{\alpha}$  – компоненты единичной нормали на  $\Gamma$

$$\begin{aligned}\left[ v_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha} - v_2 \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \bar{\nabla}_2 \hat{u}_{\alpha}^{(k)}} + \frac{\partial \mathcal{R}_{\Gamma}}{\partial \hat{u}_{\alpha}^{(k)}} \right] \delta \hat{u}_{\alpha}^{(k)} \Big|_{\Gamma} &= 0; \\ \left[ v_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{13} - v_2 \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial \bar{\nabla}_2 \hat{u}_3^{(k)}} + \frac{\partial \mathcal{R}_{\Gamma}}{\partial \hat{u}_3^{(k)}} \right] \delta \hat{u}_3^{(k)} \Big|_{\Gamma} &= 0.\end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае теории оболочек  $N$ -го порядка с учетом (2.5) и (2.6) обобщенные уравнения Рауса (2.9), (2.10) и краевые условия (2.11) имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_1 \hat{u}_1^{(k)} &= B_{1111}^{(km)} \hat{\sigma}_{(m)}^{11} - K_{11(\cdot m)}^{22(k\cdot)} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} - h^{-1} K_{11(\cdot n)}^{33(k\cdot)} D_{(m\cdot)}^{(\cdot n)} u_3^{(m)} + \\ &+ \left( \bar{\bar{K}}_{11(\cdot m)}^{\alpha(k\cdot)} + \bar{\bar{A}}_{11(\cdot m)}^{\alpha(k\cdot)} \right) \hat{u}_{\alpha}^{(m)} + \left( b_{2\beta} \bar{\bar{K}}_{11(\cdot m)}^{\beta(k\cdot)} + b_{1\beta} \bar{\bar{A}}_{11(\cdot m)}^{\beta(k\cdot)} \right) u_3^{(m)}; \\ \bar{\nabla}_1 \hat{u}_2^{(k)} &= B_{1212}^{(km)} \hat{\sigma}_{(m)}^{12} - \bar{\nabla}_2 \hat{u}_1^{(k)} + 2 \bar{\bar{A}}_{12(\cdot m)}^{\alpha(k\cdot)} \hat{u}_{\alpha}^{(m)} - 2 b_{1\beta} \bar{\bar{A}}_{12(\cdot m)}^{\beta(k\cdot)} u_3^{(m)}; \\ \bar{\nabla}_1 u_3^{(k)} &= B_{1313}^{(km)} \hat{\sigma}_{(m)}^{13} - h^{-1} D_{(m\cdot)}^{(\cdot k)} \hat{u}_1^{(m)} - 2 b_{1\beta} \bar{\bar{A}}_{13(\cdot m)}^{\alpha(k\cdot)} \hat{u}_{\alpha}^{(m)},\end{aligned} \quad (2.12)$$

– определяющие уравнения для ковариантных производных  $\bar{\nabla}_1 \hat{u}_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\bar{\nabla}_1 u_3^{(k)}$ ;

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{11} &= -\bar{\nabla}_2 \hat{\sigma}_{(k)}^{12} - \left( \bar{\bar{K}}_{11(\cdot k)}^{1(m\cdot)} + \bar{\bar{A}}_{11(\cdot k)}^{1(m\cdot)} \right) \hat{\sigma}_{(m)}^{11} - 2 \bar{\bar{A}}_{12(\cdot k)}^{1(m\cdot)} \hat{\sigma}_{(m)}^{12} + \\ &+ \left( h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(\cdot m)} + 2 b_{1\beta} \bar{\bar{A}}_{13(\cdot \beta)}^{1(k\cdot)} \right) \hat{\sigma}_{(m)}^{13} - \bar{\bar{C}}_{(km)}^{22,1} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} + b_{2\beta} \bar{\bar{C}}_{\beta(km)}^{23,1} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_3^{(m)} + \\ &+ \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{\hat{u}}_1^{(m)} + \left( \bar{\bar{C}}_{(km)}^{1\beta} + b_{2\gamma} b_{2\delta} \bar{\bar{C}}_{\gamma\delta(km)}^{1\beta} \right) \hat{u}_{\beta}^{(m)} + 2 h^{-1} b_{2\beta} \bar{\bar{C}}_{\beta(km)}^{23,1} D_{(m\cdot)}^{(\cdot n)} \hat{u}_2^{(m)} - \hat{F}_{(k)}^1; \\ \bar{\nabla}_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{12} &= -\bar{\nabla}_2 \left( K_{11(\cdot k)}^{22(m\cdot)} \hat{\sigma}_{(m)}^{11} \right) - \left( \bar{\bar{K}}_{11(\cdot k)}^{2(m\cdot)} + \bar{\bar{A}}_{11(\cdot k)}^{2(m\cdot)} \right) \hat{\sigma}_{(m)}^{11} - 2 \bar{\bar{A}}_{12(\cdot k)}^{2(m\cdot)} \hat{\sigma}_{(m)}^{12} +\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
& + 2b_1^\beta \bar{A}_{13,\beta(m)}^{2(k\cdot)} \bar{\sigma}_{(m)}^{13} - \bar{\nabla}_2 \left[ \tilde{C}_{(km)}^{2222} \bar{\nabla}_2 \bar{u}_2^{(m)} + \bar{C}_{(km)}^{22,\alpha} \bar{u}_\alpha^{(m)} \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m\cdot)}^{(n\cdot)} \right) u_3^{(m)} \right] + \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{u}_{(m)}^2 + \left( \bar{C}_{(km)}^{2\beta} + b_2^\gamma b_2^\delta \bar{C}_{\gamma\delta(km)}^{2\beta} \right) \bar{u}_\beta^{(m)} + \\
& + \left( h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(l\cdot)} \bar{C}_{(lm)}^{2323} + b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,1} \right) \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(n\cdot)}^{(m\cdot)} \bar{u}_2^{(n)} \right) + \\
& + h^{-1} D_{(n\cdot)}^{(m\cdot)} b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \bar{u}_\alpha^{(m)} - \bar{F}_{(k)}^2; \\
\bar{\nabla}_1 \bar{\sigma}_{(k)}^{13} = & - \left( b_{2\beta} \bar{K}_{11(k\cdot)}^{\beta(m\cdot)} + b_{1\beta} \bar{A}_{11(k\cdot)}^{\beta(m\cdot)} - h^{-1} K_{11(n\cdot)}^{33(m\cdot)} D_{(k\cdot)}^{(n\cdot)} \right) \bar{\sigma}_{(m)}^{11} + 2b_{1\beta} \bar{A}_{12(k\cdot)}^{\beta(m\cdot)} \bar{\sigma}_{(m)}^{12} - \\
& + \bar{\nabla}_2 \left[ \bar{C}_{(km)}^{2323} \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(n\cdot)}^{(m\cdot)} \bar{u}_2^{(n)} \right) + 2b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \bar{u}_\alpha^{(m)} \right] - \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - \right. \\
& \left. - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m\cdot)}^{(n\cdot)} \right) \bar{\nabla}_2 \bar{u}_2^{(m)} + \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} - h^{-1} \bar{C}_{(kn)}^{33,\alpha} D_{(m\cdot)}^{(n\cdot)} \right) \bar{u}_\alpha^{(m)} + \\
& + h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(l\cdot)} u_3^{(k)} \left( h^{-1} \tilde{C}_{(ln)}^{3333} D_{(m\cdot)}^{(n\cdot)} - b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{33,\beta} - b_{2\alpha} b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} \right) u_3^{(m)} - F^3
\end{aligned}$$

– уравнения движения, разрешенные относительно ковариантных производных  $\bar{\nabla}_1$ ;

$$\begin{aligned}
& \left[ v_1 \bar{\sigma}_{(k)}^{11} - v_2 \bar{\sigma}_{(k)}^{12} \right] \delta \bar{u}_1^{(k)} \Big|_\Gamma = 0; \\
& \left[ v_1 \bar{\sigma}_{(k)}^{12} - v_2 \left( K_{11(k\cdot)}^{22(m\cdot)} \bar{\sigma}_{(m)}^{11} - \tilde{C}_{(km)}^{2222} \bar{\nabla}_2 \bar{u}_2^{(m)} - \bar{C}_{(km)}^{22,\alpha} \bar{u}_\alpha^{(m)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m\cdot)}^{(n\cdot)} \right) u_3^{(m)} \right) \delta \bar{u}_2^{(k)} \right] \Big|_\Gamma = 0; \\
& \left[ v_1 \bar{\sigma}_{(k)}^{13} - v_2 \left( \bar{C}_{(km)}^{2323} \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(k)} + h^{-1} D_{(l\cdot)}^{(k\cdot)} \bar{u}_2^{(l)} \right) + 2b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \bar{u}_\alpha^{(m)} \right) \right] \delta \bar{u}_1^{(k)} \Big|_\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

– естественные краевые условия на контуре  $\Gamma$ . Постановку начально-краевой задачи теории оболочек  $N$ -го порядка замыкают начальные условия (2.8).

Формулировка статической краевой задачи, вытекающая из (2.12)-(2.14), приводит в пространственно-одномерном случае для плоского слоя к решению в форме [97,98], для толстостенных оболочек вращения – к решениям [99,100].

### 3. ПРИЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАУСА ТЕОРИИ $N$ -ГО ПОРЯДКА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

#### 3.1. Постановка задачи о дисперсии нормальных волн в упругом слое.

Рассмотрим задачу стационарной динамики для плоского упругого изотропного слоя с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , отнесенного к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox^1x^2x^3$  так, что

$$V: (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2; \quad x^3 \in [-h/2, h/2]; \quad t \in [0, \infty); \quad S_B \equiv \emptyset, \quad S_\pm: x^3 = \pm h/2.$$

Пусть  $F^\alpha = F^3 \equiv 0$ . Обобщенные уравнения Рауса (2.12), (2.13) для слоя в рамках теории пластин ( $b_{\alpha\beta} \equiv 0$ ,  $A_\alpha^\beta = A_\alpha^\beta \equiv 0$ ) имеют следующий вид [101]

$$\begin{aligned}
\partial_1 u_1^{(k)} &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} \bar{E}^{(km)} \sigma_{11(m)} - \frac{\nu}{1-\nu} h^{-1} D_{(m\cdot)}^{(k\cdot)} u_3^{(m)}; \\
\partial_1 u_3^{(k)} &= 2(1+\nu) \bar{E}^{(km)} \sigma_{13(m)} - h^{-1} D_{(m\cdot)}^{(k\cdot)} u_1^{(m)};
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1 \sigma_{11(k)} &= h^{-1} D_{(k \cdot)}^{(m)} \sigma_{13(m)} + \rho_{(km)} \ddot{u}_1^{(m)}; \\
\partial_1 \sigma_{13(m)} &= \frac{v}{1-v} h^{-1} D_{(k \cdot)}^{(m)} \sigma_{11(m)} + \rho_{(km)} \ddot{u}_3^{(m)} + \frac{1}{1-v^2} E_{(ln)} h^{-2} D_{(k \cdot)}^{(l)} D_{(m \cdot)}^{(n)} u_3^{(m)}; \\
E_{(km)} &= h \left( E(\zeta) p_{(k)}, p_{(m)} \right), \quad \bar{E}^{(km)} = h^{-1} \left( E^{-1}(\zeta) p^{(k)}, p^{(m)} \right)_1.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Рассмотрим далее нормальную волну, распространяющуюся вдоль оси  $Ox^1$

$$u_{1,3}^{(k)} = U_{1,3}^{(k)} \exp[i(kx - \omega t)], \quad \sigma_{11,13(k)} = S_{11,13(k)} \exp[i(kx - \omega t)], \tag{3.3}$$

$i = \sqrt{-1}$ . С учетом (3.3) определяющие уравнения (3.1) и уравнения движения (3.2) приводятся к безразмерной матричной форме записи (3.4) [101]

$$[A(\tilde{\omega}) - i\tilde{k}I]Y = 0, \tag{3.4}$$

$$A(\tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v}{1-v} D_{(m \cdot)}^{(k)} & \frac{1-2v}{2-2v} \tilde{E}^{(km)} & 0 \\ -D_{(m \cdot)}^{(k)} & 0 & 0 & \tilde{E}^{(km)} \\ -\tilde{\omega}^2 \tilde{\rho}_{(km)} & 0 & 0 & D_{(m \cdot)}^{(k)} \\ 0 & -\tilde{\omega}^2 \tilde{\rho}_{(km)} + \frac{2}{1-v} \tilde{E}_{(ln)} D_{(k \cdot)}^{(l)} D_{(m \cdot)}^{(n)} & \frac{v}{1-v} D_{(k \cdot)}^{(m)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$Y = \left( U_1^{(0)} \dots U_1^{(N)}, U_3^{(0)} \dots U_3^{(N)}, \tilde{S}_{11(0)} \dots \tilde{S}_{11(N)}, \tilde{S}_{13(0)} \dots \tilde{S}_{13(N)} \right)^T.$$

Здесь  $c_2 = \sqrt{(2+2v)^{-1} \rho_0^{-1} E_0}$  – скорость волны сдвига в среде с некоторыми значениями  $\rho_0$ ,  $E_0$  массовой плотности и модуля Юнга,  $\tilde{S}_{11,13(k)} = 2(1+v) E_0^{-1} S_{11,13(k)}$ ,  $\tilde{U}_{1,3}^{(k)} = h^{-1} U_{1,3}^{(k)}$  – безразмерные амплитуды,  $\tilde{k} = hk$ ,  $\tilde{\omega} = hc_2^{-1} \omega$  – безразмерные волновое число и фазовая частота,  $\tilde{E}_{(km)} = E_0^{-1} E_{(km)}$ ,  $\tilde{E}^{(km)} = E_0 \bar{E}^{(km)}$ ,  $\tilde{\rho}_{(km)} = \rho_0^{-1} \rho_{(km)}$ .

Условием существования нетривиального решения (3.4) является дисперсионное уравнение (3.6), линейное относительно волнового числа  $i\tilde{k}$

$$|A(\tilde{\omega}) - i\tilde{k}I| = 0. \tag{3.6}$$

Собственными значениями оператора (3.5) являются  $\tilde{k} \in \mathbb{C} \quad \forall \tilde{\omega} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ .

### 3.2. Сходимость приближенного решения задачи о дисперсии волн в плоском однородном изотропном упругом слое.

Рассмотрим далее плоский однородный изотропный слой ( $E = E_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ); точное решение задачи Рэлея-Лэмба приведено, в частности, в монографии [4].

Дисперсионные кривые, соответствующие распространяющимся модам ( $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ ) и затухающим модам (мнимые ветви  $i\tilde{k} \in \mathbb{R}$  и комплексные ветви  $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ ) нормальных волн, вычисленные на основе теории пластин 19 порядка, приведены на рис.1а (продольные волны), рис.1б (изгибные волны).

В работах [69-79] приведены результаты исследования сходимости решений задач о дифракции нормальных волн в упругих волноводах, полученных на основе теории  $N$ -го порядка для действительных собственных значений, т.е. для распространяющихся мод. Полученное выше решение спектральной задачи (3.6) для оператора (3.5) для мнимых ветвей дисперсионных кривых

исследовано на сходимость к точному решению задачи Рэлея-Лэмба [4] в следующих четырех характерных точках второго квадранта, заданных пересечениями 3, 4, 5, 6 эллипсов решетки Миндлина с 5, 6, 7 и 8 окружностями (рис.2а,б)

$$1: 2\tilde{\kappa}/\pi = 1,709; \quad 2\tilde{\omega}/\pi = 4,698;$$

$$2: 2\tilde{\kappa}/\pi = 2,898; \quad 2\tilde{\omega}/\pi = 5,254;$$

$$3: 2\tilde{\kappa}/\pi = 3,985; \quad 2\tilde{\omega}/\pi = 5,754;$$

$$4: 2\tilde{\kappa}/\pi = 5,036; \quad 2\tilde{\omega}/\pi = 6,216;$$

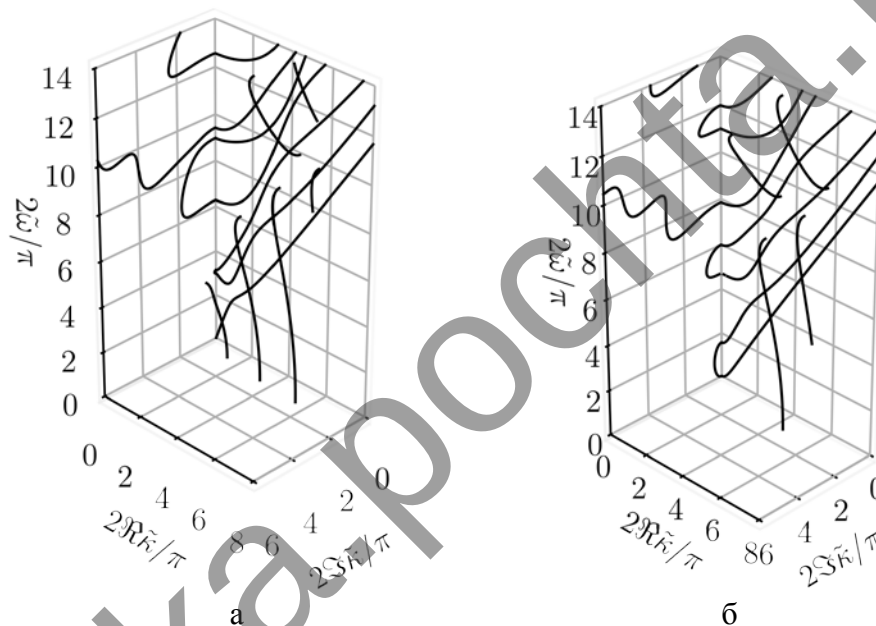


Рис.1. Дисперсионные кривые продольных волны (а) и изгибных волн (б) в плоском изотропном упругом слое.

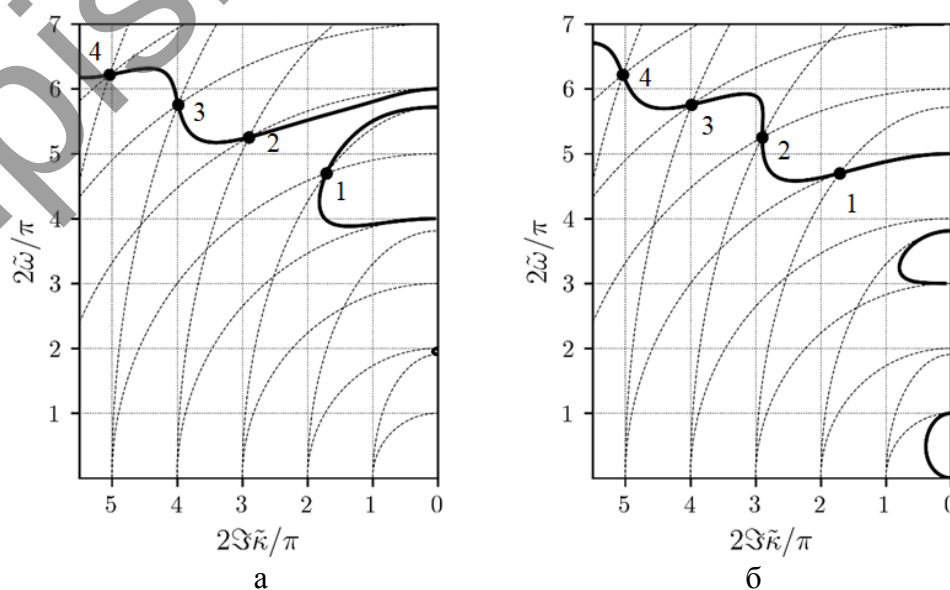


Рис.2. Дисперсионные кривые, соответствующие минимальным собственным значениям: продольные волны (а), изгибные волны (б) (теория 19 порядка).



Результаты исследования сходимости решения приведены в Таблице 1 (продольные моды) и Таблице 2 (изгибные моды) для теорий 7-21 порядков. Допустимая погрешность мнимого безразмерного волнового числа  $\Im \tilde{\kappa}_K^N$  вычисляемого в  $K$ -м узле решетки Миндлина на основе теории  $N$ -го порядка, определяются соотношением

$$\delta \tilde{\kappa}_K^N = \left( \Im \tilde{\kappa}_K^* \right)^{-1} \left| \Im \tilde{\kappa}_K^N - \Im \tilde{\kappa}_K^* \right| \leq 0.05, \quad K = 1, 2, 3, 4,$$

где  $\Im \tilde{\kappa}_K^*$  – абсцисса точки пересечения соответствующих эллипсов решетки.

Таблица 1.

Погрешность вычисления безразмерного волнового числа  $2\Im \tilde{\kappa}_K^N / \pi$  в узлах решетки Миндлина: продольные волны.

| $K$ | $N = 7$ | $N = 9$ | $N = 11$ | $N = 13$ | $N = 15$ | $N = 17$ | $N = 19$ | $N = 21$ | $\Im \tilde{\kappa}_K^*$ |
|-----|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------------------|
| 1   | 0,002   | 0,074   | 0,006    | 0,001    | 0,001    | 0,001    | 0,001    | 0,001    | 1,709                    |
| 2   | 2,502   | 2,898   | 0,055    | 0,002    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 2,898                    |
| 3   | 3,985   | 3,985   | 3,985    | 0,259    | 0,018    | 0,001    | 0,000    | 0,000    | 3,985                    |
| 4   | 0,126   | 5,036   | 5,036    | 5,036    | 0,189    | 0,004    | 0,000    | 0,000    | 5,036                    |

Таблица 2.

Погрешность вычисления безразмерного волнового числа  $2\Im \tilde{\kappa}_K^N / \pi$  в узлах решетки Миндлина: изгибные волны.

| $K$ | $N = 7$ | $N = 9$ | $N = 11$ | $N = 13$ | $N = 15$ | $N = 17$ | $N = 19$ | $N = 21$ | $\Im \tilde{\kappa}_K^*$ |
|-----|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------------------|
| 1   | 0,215   | 0,032   | 0,002    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 1,709                    |
| 2   | 1,787   | 1,642   | 1,580    | 0,014    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 2,898                    |
| 3   | 3,985   | 3,985   | 0,271    | 0,040    | 0,002    | 0,000    | 0,000    | 0,000    | 3,985                    |
| 4   | 5,036   | 2,495   | 1,330    | 1,036    | 0,902    | 0,012    | 0,001    | 0,001    | 5,036                    |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая вариационная формулировка теории  $N$ -го порядка отропных упругих оболочек, основанная на Лагранжевом формализме аналитической механики континуальных систем. Оболочка отнесена к системе криволинейных координат, нормально связанной с некоторой гладкой реперной поверхностью. В отличие от работ [67-69], в качестве переменной поля, определяющей трехмерную модель оболочки, в рассмотрение введен вектор квазиперемещения, определенный компонентами вектора пространственного перемещения на расслоении двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности и связанный с перемещением линейным преобразованием, заданным тензором параллельного переноса. Получен функционал Лагранжа в трехмерном представлении и определен вектор квазинапряжения на площадках, ортогональных некоторому выбранному координатному направлению, также заданный на расслоении двумерного многообразия, связанный с истинным напряжением линейным преобразованием переноса. Путем преобразования Лежандра функционала Лагранжа по ковариантным производным компонентов вектора квазиперемещения, соответствующим выбранному координатному направлению, и соответствующим компонентам вектора квазинапряжения

получен новый смешанный функционал для оболочки как трехмерного тела и произведена его пространственная редукция, основанная на разложении аргументов функционала по некоторой биортогональной базисной системе функций нормальной координаты. Модель оболочки  $N$ -го порядка, таким образом, определена на расслоении двумерного многообразия пространством состояний с переменными поля, заданными коэффициентами разложения компонентов векторов квазиперемещения и квазинапряжения, поверхностной и контурной плотностями смешанного функционала, аналогичного функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем. На основе принципа Гамильтона-Остроградского получены уравнения, являющиеся условиями экстремали функционала, в силу выбора в качестве переменных поля квазиперемещения и квазинапряжения разрешенные относительно их ковариантных производных первого порядка по выбранной координате и по форме записи аналогичные уравнениям Рауса. Получены естественные краевые условия, соответствующие выведенным обобщенным уравнениям Рауса теории  $N$ -го порядка, и выполнена постановка начально-краевой задачи динамики ортотропной оболочки.

Одним из основных приложений полученных новых уравнений теории оболочек  $N$ -го порядка является решение задач о дисперсии нормальных волн в неоднородных упругих волноводах. Система уравнений, разрешенная относительно пространственных производных по направлению, совпадающему с волновым вектором, обеспечивает переход к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа, а, следовательно, и определение всех ветвей дисперсионных кривых – действительных, соответствующих распространяющимся модам нормальных волн, чисто мнимых и комплексных ветвей, соответствующих затухающим модам. Для плоского изотропного слоя получено решение спектральной задачи и проведен анализ сходимости решения по величинам мнимых волновых чисел в некоторых точках, соответствующих узлам решетки Миндлина. Показано, что для достижения погрешности приближенного решения в пределах 0,05 точного значения волнового числа в четырех узлах, соответствующих пересечению 3-6 эллипсов решетки Миндлина с 5-8 окружностями, достаточными являются теория 15 порядка в случае продольных мод и теория 17 порядка в случае изгибных мод затухающих волн.

Полученная новая формулировка теории оболочек ковариантна и сводится к единой форме записи уравнений движения и определяющих соотношений при использовании различных базисных систем – полиномов Лежандра или финитных базисных функций, соответственно, известные в теории дисперсии методы ортогональных полиномов и полуаналитических конечных элементов могут рассматриваться как ее частные случаи. Следует заметить, что представляется возможной также вариационная формулировка модели оболочки  $N$ -го порядка в переменных поля второго рода (обобщенных скоростях) и соответствующих им скоростях изменения обобщенных сил. Такой подход позволяет, в частности, перейти к постановке пространственно-одномерных начально-краевых задач в частных производных первого порядка как по пространственной, так и по временной переменным и, следовательно, обеспечить эффективное численное решение в случае неустановившегося движения на базе алгоритмов [102], например, для оболочек, взаимодействующих с окружающей средой [103,104].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Othmani C., Zhang H., Lu C., Wang Y.Q., Kamali A.R. *Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review* // Composite Structures. – 2022. – Vol.286. – 115245.
2. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.227-260.
3. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть II* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №1. – С.36-86.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах*. – Киев: Наукова думка, 1981.
5. An Y.K. *Measurement of crack-induced non-propagating Lamb wave modes under varying crack widths* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2015. – Vol.62. – Pp.134-143.
6. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique* // NDT&E International. – 2011. – Vol.44. – Pp.84-92.
7. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section* // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol.295. – Pp.685-707.
8. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lanza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides* // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol.318. – No.3. – Pp.488-505.
9. Maradudin A.A., Wallis R. F., Mills D.L., Ballard R.L. *Vibrational edge modes in finite crystals* // Physical Reviews B. – 1972. – Vol.6. – Pp.1106-1111.
10. Maradudin A. *Edge modes* // Japanese Journal of Applied Physics. Suppl. 2. – 1974. – Part 2. – Pp.871-878.
11. Datta S., Hunsinger B.J. *Analysis of surface waves using orthogonal functions* // Journal of Applied Physics. – 1978. – Vol.49. – Pp.475-479.
12. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazelet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates* // Journal of Applied Physics. – 1999. – Vol.85. – 3419.
13. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazelet J., Gryba T., Sadaune V. *Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2001. – Vol.48. – Pp.1332-1340.
14. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length* // Wave Motion. – 2005. – Vol.42. – Pp.177-189.
15. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method* // Composite Structures. – 2013. – Vol.95. – Pp.419-429.
16. Yu J.G., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Guided waves in multilayered plates: an improved orthogonal polynomial approach* // Acta Mechanica Sinica. – 2014. – Vol.27. – Pp.542-550.

17. Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X. *Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory* // Thin-Walled Structures. – 2021. – Vol.161. – 107527.
18. Сере Г. *Ортогональные полиномы*. – М.: Физматгиз, 1982. – 500 с.
19. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol.99. – Pp.57-80.
20. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach* // Composite Structures. – 2021. – Vol.256. – 112997.
21. Zhang B., Yu J.G., Zhang X.M., Ming P.M. *Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section* // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol.63. – Pp.288-302.
22. Zhang X.M., Li Z.H., Yu J.G. *Evanescent waves in FGM spherical curved plates: an analytical treatment* // Meccanica. – 2018. – Vol.53. – Pp.2145-2160.
23. Zhang X., Li Z., Yu J. *Complex dispersion solutions for guided waves and properties of non-propagating waves in a piezoelectric spherical plate* // Advances in Mechanical Engineering. – 2018. – Vol.10. – No.12. – Pp.1-11.
24. Zhang X., Li Z., Yu J., Zhang B. *Properties of circumferential non-propagating waves in functionally graded piezoelectric cylindrical shells* // Advanced Mechanical Engineering. – 2019. – Vol.11. – No.4. – Pp.1-15.
25. Zhang X., Li Z., Yu J., Ming P. *Guided evanescent waves in spherically curved plates composed of fiber reinforced composites* // Acta Mechanica. – 2019. – Vol.230. – Pp.1219-1231.
26. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol.89. – Pp.299-313.
27. Zhang B., Wu S., Yu J., Wang P., Zhang X., Zhang Y. *Propagation and attenuation of Lamb waves in functionally graded fractional viscoelastic soft plates with a pre-deformation* // Composite Structures. – 2022. – Vol.293. – 115727.
28. Zhang B., Li L.J., Yu J.G., Elmaimouni L. *Generalized thermo-elastic waves propagating in bars with a rectangular cross-section* // Archive of Applied Mechanics. – 2022. – Vol.92. – Pp.785-799.
29. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория нетонких упругих оболочек и плит* / Диссертация на соискание ученой степени доктора техн. наук. – Ташкент: Ташкентский политехнический ин-т им. Р.А. Бериуни, 1989. – 343 с.
30. Жилин П.А. *Прикладная механика. Основы теории оболочек*. – СПб: СПбГУ, 2006. – 167 с.
31. Кильчевский Н.А. *Основы аналитической механики оболочек*. – Киев: Изд. АН УССР, 1963. – 355 с.
32. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – Л: Наука, 1974. – 448 с.
33. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. – М.: Физматлит, 1976. – 512 с.
34. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. *Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек* // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – №4. – С.152-162.

35. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. *Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера* // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – №6. – С.124-138.
36. Kaplunov J.D., Kossovich L.Y. *Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies*. – London: Academic Press, 1998.
37. Бердичевский В.Л. *Вариационные принципы механики сплошной среды*. – М: Наука, 1983. – 448 с.
38. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory* // Advanced Structured Materials. – 2011. – Vol.15. – Pp.715-726.
39. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces* // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol.53. – No.1. – Pp.31-44.
40. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
41. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю. *Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (обзор)* // Прикладная механика. – 1993. – Т.29. – №11. – С.3-34.
42. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. *Неклассические модели в теории пластин и оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т.57. – №5. – С.5-14.
43. Kienzler R., Schneider P. *Consistent theories of isotropic and anisotropic plates* // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2012. – Vol.50. – No.3. – Pp.755-768.
44. Kienzler R., Schneider P. *Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second-order approximation* / In: Shell Structures: Theory and Applications. – Leiden: Balkema, Taylor & Francis Gr. – 2013. – Vol.3. – Pp.109-112.
45. Kienzler R., Schneider P. *Direct approach versus consistent approximation* // Advanced Structured Materials. – 2016. – Vol.60. – Pp.415-433.
46. Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. *Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки* // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т.12. – №2. – С.56-64.
47. Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине* // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т.11. – №4. – С.74-86.
48. Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах* // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т.13. – №1. – С.50-56.
49. Ардазишвили Р.А., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке* // Вестник Чувашского государственного педагогического ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – №4(26). – С.109-124.
50. Вильде М.В., Сергеева Н.В. *Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра* // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т.17. – №2. – С.183-195.

51. Sergeeva N.V., Wilde M.V. *Asymptotic study of dispersion relations for viscoelastic waveguides of canonical shapes in the case of Rabotnov's rheological model* / 2017 Days of Diffraction (DD 2017). – St. Petersburg, 2017. – Pp.294-299.
52. Вильде М.В., Гуляев Ю.П. *Низкочастотные осесимметричные волны в кровеносных сосудах постоянного сечения: асимптотический подход* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №4. – С.136-151.
53. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач*. – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.
54. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. *Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.
55. Хома И.Ю. *Обобщенная теория анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1986. – 167 с.
56. Волчков Ю.М. *Модифицированные уравнения слоистых пластин конечных размеров из ортотропного материала. Сравнение результатов численных расчетов с аналитическими решениями* // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т.58. – №5(345). – С.167-177.
57. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. *Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации перемещений и напряжений полиномами Лежандра* // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т.48. – №3(283). – С.450-459.
58. Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G. *Hierarchical models for elastic shells in curvilinear coordinates* // Comput. Math. Appl. – 2006. – Vol.51. – Pp.1789-1808.
59. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models* // J. of Elasticity. – 1995. – Vol.38. – Pp.1-40.
60. Никабадзе М.У. *Применение системы полиномов Лежандра к теории тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.54-56.
61. Никабадзе М.У. *Вариант системы уравнений тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.30-34.
62. Zozulya V.V. *A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories* // Journal of Engineering. – 2013. – 590480.
63. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2015. – Vol.103. – Pp.40-54.
64. Никабадзе М.У. *Некоторые вопросы варианта теории тонких тел с применением разложения по системе многочленов Чебышева второго рода* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2007. – №3. – С.73-106.
65. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. *Аналитическая механика континуальных систем*. – Киев: Наукова Думка, 1979. – 188 с.
66. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
67. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications* / In: Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. – Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013. – Vol.3. – Pp.341-344.

68. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells* // ZAMM. – 2014. – Vol.94. – No.1-2. – Pp.164-184.
69. Жаворонок С.И. *Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек  $N$ -го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Vol.16. – No.4-2. – Pp.693-701.
70. Жаворонок С.И. *Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек  $N$ -го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.278-287.
71. Жаворонок С.И. *Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек  $N$ -го порядка для различных значений волновых чисел* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.
72. Жаворонок С.И. *Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории  $N$ -го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложение к задачам стационарной динамики* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.
73. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О приложении различных вариантов теории оболочек  $N$ -го порядка к некоторым задачам о прогрессивных волнах* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2014. – №11-1. – С.255-266.
74. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О вариационных уравнениях расширенной теории  $N$ -го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – №2. – С.36-59.
75. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems* // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol.14. – No.1. – Pp.36-48.
76. Жаворонок С.И. *Применение расширенной теории пластин  $N$ -го порядка к решению задачи о дисперсии волн в градиентно-неоднородном слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.240-258.
77. Жаворонок С.И. *О применении различных уравнений трехмерной теории пластин  $N$ -го порядка в задачах о дисперсии нормальных волн в упругом слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.595-613.
78. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories* // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – 2020. – Vol.11. – No.2. – Pp.159-185.
79. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I.N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides* // Archives of Mechanics. – 2020. – Vol.72. – No.1. – Pp.1-13.
80. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. – Stanford University, Technical Report CS 142. – 1969.
81. Tarn J.Q., Tseng W.D. *Exact analysis of curved beams and arches with arbitrary end conditions: a Hamiltonian state-space approach* // Journal of Elasticity. – 2012. – Vol.107. – Pp.39-63.

82. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *A Hamiltonian State Space Approach for 3D Analysis of Circular Cantilevers* // Journal of Elasticity. – 2010. – Vol.101. – Pp.207-237.
83. Chang H.H., Tarn J.Q. *Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates* // Journal of Elasticity. – 2012. – Vol.108. – Pp.49-66.
84. Tarn J.Q., Chang H.H. *A Hamiltonian state space approach to anisotropic elasticity and piezoelectricity* // Acta Mechanica. – 2013. – Vol.224. – Pp.1271-1284.
85. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *Axisymmetric Deformation of a Transversely Isotropic Cylindrical Body: A Hamiltonian State-Space Approach* // Journal of Elasticity. – 2009. – Vol.97. – Pp.131-154.
86. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *Modelling guided waves in anisotropic plates using the Legendre polynomial method* // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol.104. – 02015.
87. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates* // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol.412. – Pp.372-388.
88. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates* // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol.412. – Pp.372-388.
89. Zheng M., Ma H., Lyu Y., Lu C., He C. *Derivation of circumferential guided waves equations for a multilayered laminate composite hollow cylinder by state-vector and Legendre polynomial hybrid formalism* // Composite Structures. – 2021. – Vol.255. – 112950.
90. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling Guided Wave Propagation in Functionally Graded Plates by State-vector Formalism and the Legendre Polynomial Method* // Ultrasonics. – 2019. – Vol.99. – 105953.
91. Gao J., Zhang J., Lyu J., Song S., He C. *Lamb Waves Propagation Characteristics in Functionally Graded Sandwich Plates* // Sensors. – 2022. – Vol.22. – No.11. – 4052.
92. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in multi-layered anisotropic composite laminates by state-vector formalism and the Legendre polynomials* // Composite Structure. – 2019. – Vol.228. – 111319.
93. Zhavoronok S.I. *On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17. – No.1. – Pp.72-81.
94. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. – М: Наука, 1980. – 512 с.
95. Zhavoronok S.I. *On Hamiltonian formulations and conservation laws for plate theories of Vekua-Amosov type* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Vol.13. – No.4. – Pp.82-95.
96. Маркеев А.П. *Теоретическая механика: учебник для университетов*. – М: ЧеРо, 1999. – 572 с.
97. Амосов А.А., Жаворонок С.И. *К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т.3. – №1. – С.69-80.
98. Амосов А.А., Князев А.А., Жаворонок С.И. *О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции* //



Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т.5. – №1. – С.60-72.

99. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. *О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №3. – С.301-310.
100. Жаворонок С.И., Леонтьев А.Н., Леонтьев К.А. *Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2010. – Т.6. – №1-2. – С.105-111.
101. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskii L.N. *The Generalized Routh Equations in the Plate Theory of Nth Order and their Use in Problems of Normal Wave Dispersion in Heterogeneous Waveguides* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43. – No.7. – Pp.2010-2018.
102. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. – М: Физматлит, 2000. – 608 с.
103. Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. *Осесимметричная задача нестационарного взаимодействия акустической волны давления с упругой оболочкой вращения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т.12. – №4. – С.541-554.
104. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. *Взаимодействие оболочки средней толщины с акустической волной* // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т.17. – №2. – С.127-135.

## REFERENCES

1. Othmani C., Zhang H., Lu C., Wang Y.Q., Kamali A.R. *Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review*. Composite Structures, 2022, Vol.286, 115245.
2. Zhavoronok S.I. *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor). Chast' I [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part I]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.2, Pp.227-260.
3. Zhavoronok S.I. *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor). Chast' II [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part II]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2022, Vol.28, No.1, Pp.36-86.
4. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic Oscillations & Waves in Elastic Bodies]*. Kiev, Naukova dumka, 1981.
5. An Y.K. *Measurement of crack-induced non-propagating Lamb wave modes under varying crack widths*, Intern. J. of Solids and Structures, 2015, Vol.62, Pp.134-143.
6. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique*, NDT&E International, 2011, Vol.44, Pp.84-92.

7. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section*. Journal of Sound and Vibration, 2006, Vol.295, Pp.685-707.
8. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lanza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides*. Journal of Sound and Vibration, 2008, Vol.318, No.3, Pp.488-505.
9. Maradudin A.A., Wallis R. F., Mills D.L., Ballard R.L. *Vibrational edge modes in finite crystals*. Physical Reviews B, 1972, Vol.6, Pp.1106-1111.
10. Maradudin A. *Edge modes*. Japanese Journal of Applied Physics, Suppl. 2, 1974, Part 2, Pp.871-878.
11. Datta S., Hunsinger B.J. *Analysis of surface waves using orthogonal functions*. Journal of Applied Physics, 1978, Vol.49, Pp.475-479.
12. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates*. Journal of Applied Physics, 1999, Vol.85, 3419.
13. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T., Sadaune V. *Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2001, Vol.48, Pp.1332-1340.
14. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length*. Wave Motion, 2005, Vol.42, Pp.177-189.
15. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method*. Composite Structures, 2013, Vol.95, Pp.419-429.
16. Yu J.G., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Guided waves in multilayered plates: an improved orthogonal polynomial approach*. Acta Mechanica Solida Sinica, 2014, Vol.27, Pp.542-550.
17. Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X. *Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory*. Thin-Walled Structures, 2021, Vol.161, 107527.
18. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. New York, American Mathematical Soc., 1959.
19. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach*. Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.99, Pp.57-80.
20. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach*. Composite Structures, 2021, Vol.256, 112997.
21. Zhang B., Yu J.G., Zhang X.M., Ming P.M. *Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section*. Applied Mathematical Modelling, 2018, Vol.63, Pp.288-302.
22. Zhang X.M., Li Z.H., Yu J.G. *Evanescent waves in FGM spherical curved plates: an analytical treatment*. Meccanica, 2018, Vol.53, Pp.2145-2160.
23. Zhang X., Li Z., Yu J. *Complex dispersion solutions for guided waves and properties of non-propagating waves in a piezoelectric spherical plate*. Advances in Mechanical Engineering, 2018, Vol.10, No.12, Pp.1-11.

24. Zhang X., Li Z., Yu J., Zhang B. *Properties of circumferential non-propagating waves in functionally graded piezoelectric cylindrical shells*. Advanced Mechanical Engineering, 2019, Vol.11, No.4, Pp.1-15.
25. Zhang X., Li Z., Yu J., Ming P. *Guided evanescent waves in spherically curved plates composed of fiber reinforced composites*. Acta Mechanica, 2019, Vol.230, Pp.1219-1231.
26. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder*. Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.89, Pp.299-313.
27. Zhang B., Wu S., Yu J., Wang P., Zhang X., Zhang Y. *Propagation and attenuation of Lamb waves in functionally graded fractional viscoelastic soft plates with a pre-deformation*. Composite Structures, 2022, Vol.293, 115727.
28. Zhang B., Li L.J., Yu J.G., Elmaimouni L. *Generalized thermo-elastic waves propagating in bars with a rectangular cross-section*. Archive of Applied Mechanics, 2022, Vol.92, Pp.785-799.
29. Amosov A.A. *Priblizhennaya trekhmernaya teoriya netonkih uprugih obolochek i plit. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhn. nauk [Approximate three-dimensional theory of non-thin elastic shells and plates. Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences]*. Tashkent, Tashkentskij politekhnicheskij institut im. R.A. Beruni, 1989, 343 p.
30. Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek [Applied Mechanics. Basics of the Shell Theory]*. SPb, SpbGU, 2006, 167 p.
31. Kil'chevskij N.A. *Osnovy analiticheskoy mekhaniki obolochek [Fundamentals of analytical mechanics of shells]*. Kiev, Izdatel'stvo AN USSR, 1963, 355 p.
32. Ambarcumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnyh obolochek [General theory of anisotropic shells]*. Leningrad, Nauka, 1974, 448 p.
33. Gol'denveizer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek [Theory of thin elastic shells]*. Moskva, Fizmatlit, 1976, 512 p.
34. Goldenveizer A.L., Kaplunov Yu.D. *Dynamic boundary layer in problems of shell vibrations*. Mechanics of Solids, 1988, No.4, Pp.152-162.
35. Gol'denveizer A.L., Kaplunov Yu.D., Nol'de E.V. *Asymptotic analysis and refinement of theories of plates and shells of the Timoshenko-Reissner type*. Mechanics of Solids, 1990, No.6, Pp.124-138.
36. Kaplunov J.D., Kossovich L.Y. *Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies*. London, Academic Press, 1998.
37. Berdichevskij V.L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoj sredy [Variational principles of the continuum mechanics]*. Moskva, Nauka, 1983, 448 p.
38. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory*. Advanced Structured Materials, 2011, Vol.15, Pp.715-726.
39. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.1, Pp.31-44.
40. Vekua I.N. *Shell Theory: General Methods of Construction*. Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985.
41. Nemish Yu.N., Homa I.Yu. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie netonkikh obolochek i plastin. Obobshchennaya teoriya (obzor) [Stress-strain state of non-thin shells and plates. Generalized Theory (review)]*. Prikladnaya mekhanika, 1993, Vol.29, No.11, Pp.3-34.

42. Annin B.D., Volchkov Yu.M. *Nonclassical models of the theory of plates and shells*. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, Vol.57, Pp.769-776.
43. Kienzler R., Schneider P. *Consistent theories of isotropic and anisotropic plates*, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, Vol.50, No.3, Pp.755-768.
44. Kienzler R., Schneider P. *Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second-order approximation*. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Leiden, Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013, Vol.3, Pp.109-112.
45. Kienzler R., Schneider P. *Direct approach versus consistent approximation*. *Advanced Structured Materials*, 2016, Vol.60, Pp.415-433.
46. Kossovich L.Y., Wilde M.V., Shevtsova Y.V. *Asimptoticheskoe integrirovanie dinamicheskikh uravnenij teorii uprugosti dlya sluchaya mnogoslojnoj tonkoj obolochki [Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell]*. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, Vol.12, Iss.2, Pp.56-64.
47. Wilde M.V., Kossovich L.Y. *Asimptoticheskaya model' dal'nego polya volny Releya v mnogoslojnoj plastine [An Asymptotic Model for the Far-Field of Rayleigh Wave in Multilayered Plate]*. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2011, Vol.11, Iss.4, Pp.74-86.
48. Ardazishvili R.V., Wilde M.V., Kossovich L.Y. *Antisimmetrichnye kromochnye volny vysshego poryadka v plastinakh [Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Plates]*. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, Vol.13, Iss.1, Pp.50-56.
49. Ardazishvili R.V., Wilde M.V., Kossovich L.Y. *Trekhmernye fundamental'nye kromochnye volny v tonkoj obolochke [Three-dimensional fundamental edge waves in thin shell]*. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2015, No.4(26), Pp.109-124.
50. Wilde M.V., Sergeeva N.V. *Razvitie asimptoticheskikh metodov analiza dispersionnykh sootnoshenij dlya nasledstvenno-uprugogo sploshnogo tsilindra [Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder]*. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2017, Vol.17, Iss.2, Pp.183-195.
51. Sergeeva N.V., Wilde M.V. *Asymptotic study of dispersion relations for viscoelastic waveguides of canonical shapes in the case of Rabotnov's rheological model*, 2017 Days of Diffraction (DD 2017), St. Petersburg, 2017, Pp.294-299.
52. Wilde M.V., Gulyaev Yu.P. *Low-frequency axisymmetric waves in blood vessels of constant cross-section: an asymptotic approach*, *Mechanics of Solids*, 2009, Vol.44, Pp.608-620.
53. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Non-classical theory of shells and its application to solving engineering problems]*. L'vov, Vishcha shkola, 1978, 192 p.
54. Pelekh B.L., Suhorol'skij M.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugikh anizotropnykh obolochek [Contact problems of the theory of elastic anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1979, 216 p.

55. Homa I.Yu. *Obobshchennaya teoriya anizotropnykh obolochek [Generalized theory of anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1986, 167 p.
56. Volchkov Yu.M. *Modified equations of finite-size layered plates made of orthotropic material. Comparison of the results of numerical calculations with analytical solutions*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol.58, Pp.904-913.
57. Volchkov Yu.M., Dergileva L.A. *Reducing three-dimensional elasticity problems to two-dimensional problems by approximating stresses and displacements by legendre polynomials*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2007, Vol.48, Pp.450-459.
58. Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G. *Hierarchical models for elastic shells in curvilinear coordinates*. Comput. Math. Appl, 2006, Vol.51, Pp.1789-1808.
59. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models*. Journal of Elasticity, 1995, Vol.38, Pp.1-40.
60. Nikabadze M.U. *Primenenie sistemy polinomov Lezhandra k teorii tonkikh tel [Application of the Legendre polynomial system to the thin bodies theory]* Vestnik Moskovskogo universiteta im. M.V. Lomonosova. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 2007, No.5, Pp.54-56.
61. Nikabadze M.U. *Variant sistemy uravnenij tonkikh tel [A variant of the system of equations of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo universiteta im. M.V. Lomonosova. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 2006, No.1, Pp.30-34.
62. Zozulya V.V. *A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories*. Journal of Engineering, 2013, 590480.
63. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods*. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, Vol.103, Pp.40-54.
64. Nikabadze M.U. *Some issues concerning a version of the theory of thin solids based on expansions in a system of Chebyshev polynomials of the second kind*, Mechanics of Solids, 2007, Vol.42, Pp.391-421.
65. Kil'chevskij N.A., Kil'chinskaya G.A., Tkachenko N.E. *Analiticheskaya mekhanika kontinual'nykh sistem [Analytical Dynamics of Continuum Systems]*. Kiev, Naukova Dumka, 1979, 188 p.
66. Zhavoronok S.I. *Obobshchennye uravneniya Lagrannya vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell's theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.
67. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications*. In Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013, Vol.3, Pp.341-344.
68. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells*, ZAMM, 2014, Vol.94, No.1-2, Pp.164-184.
69. Zhavoronok S.I. *Issledovanie garmonicheskikh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.693-701.
70. Zhavoronok S.I. *Issledovanie rasprostranyayushhikhsya mod garmonicheskikh voln v uprugom sloe na baze trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of propagating modes of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-*

- dimensional shells theory*]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2011, Vol.17, No.2, Pp.278-287.
71. Zhavoronok S.I. *Issledovanie kinematiki normal'nykh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka dlya razlichnykh znachenij volnovykh chisel* [Kinematics of normal modes in elastic layer for some wavenumbers investigation based on  $n$ -th order three-dimensional shells' theory]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2012, Vol.18, No.1, Pp.45-56.
72. Zhavoronok S.I. *Formulirovka nachal'no-kraevoy zadachi priblizhennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka v obobshchennykh peremeshheniyakh i ee prilozhenie k zadacham statsionarnoy dinamiki* [A formulation of the three-dimensional approximated shells theory of  $N$ -th order using generalized displacements and its application to steady dynamics]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2012, Vol.18, No.3, Pp.333-344.
73. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O prilozhenii razlichnykh variantov teorii obolochek N-go poryadka k nekotorym zadacham o progressivnykh volnakh* [An application of various  $N$ -th order shell theories to normal waves propagation problems]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2014, No.11-1, Pp.255-266.
74. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O variatsionnykh uravneniyakh rasshirennoj teorii N-go poryadka uprugikh obolochek i ikh prilozhenii k nekotorym zadacham dinamiki* [An application of various  $N$ -th order shell theories to normal waves propagation problems]. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2015, No.2, Pp.36-59.
75. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems*. International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Vol.14, No.1, Pp.36-48.
76. Zhavoronok S.I. *Primenenie rasshirennoj teorii plastin N-go poryadka k resheniyu zadachi o dispersii voln v gradientno-neodnorodnom sloe* [An application of the  $n$ th order extended plate theory in the wave dispersion problem for a functionally graded layer]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2019, Vol.25, No.2, Pp.240-258.
77. Zhavoronok S.I. *O primenении razlichnykh uravnenij trekhmernoj teorii plastin N-go poryadka v zadachakh o dispersii normal'nykh voln v uprugom sloe* [On the use of various equations of the  $n$  order plate theory in problems of normal wave dispersion in an elastic layer]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2019, Vol.25, No.4, Pp.595-613.
78. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories*. Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2020, Vol.11, No.2, Pp.159-185.
79. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I. N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides*. Archives of Mechanics, 2020, Vol.72, No.1, Pp.1-13.
80. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. Stanford University, Technical Report CS 142, 1969.

81. Tarn J.Q., Tseng W.D. *Exact analysis of curved beams and arches with arbitrary end conditions: a Hamiltonian state-space approach*. Journal of Elasticity, 2012, Vol.107, Pp.39-63.
82. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *A Hamiltonian State Space Approach for 3D Analysis of Circular Cantilevers*. Journal of Elasticity, 2010, Vol.101, Pp.207-237.
83. Chang H.H., Tarn J.Q. *Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates*. Journal of Elasticity, 2012, Vol.108, Pp.49-66.
84. Tarn J.Q., Chang H.H. *A Hamiltonian state space approach to anisotropic elasticity and piezoelectricity*. Acta Mechanica, 2013, Vol.224, Pp.1271-1284.
85. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *Axisymmetric Deformation of a Transversely Isotropic Cylindrical Body: A Hamiltonian State-Space Approach*. Journal of Elasticity, 2009, Vol.97, Pp.131-154.
86. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *Modelling guided waves in anisotropic plates using the Legendre polynomial method*. MATEC Web of Conferences, 2017, Vol.104, 02015.
87. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates*. Journal of Sound and Vibration, 2018, Vol.412, Pp.372-388.
88. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates*. Journal of Sound and Vibration, 2018, Vol.412, Pp.372-388.
89. Zheng M., Ma H., Lyu Y., Lu C., He C. *Derivation of circumferential guided waves equations for a multilayered laminate composite hollow cylinder by state-vector and Legendre polynomial hybrid formalism*. Composite Structures, 2021, Vol.255, 112950.
90. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling Guided Wave Propagation in Functionally Graded Plates by State-vector Formalism and the Legendre Polynomial Method*. Ultrasonics, 2019, Vol.99, 105953.
91. Gao J., Zhang J., Lyu J., Song S., He C. *Lamb Waves Propagation Characteristics in Functionally Graded Sandwich Plates*. Sensors, 2022, Vol.22, No.11, 4052.
92. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in multi-layered anisotropic composite laminates by state-vector formalism and the Legendre polynomials*. Composite Structure, 2019, Vol.228, 111319.
93. Zhavoronok S.I. *On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021, Vol.17, No.1, Pp.72-81.
94. Lur'e A.I. *Nelinejnaya teoriya uprugosti [Nonlinear Elasticity Theory]*. Moskva, Nauka, 1980.
95. Zhavoronok S.I. *On Hamiltonian formulations and conservation laws for plate theories of Vekua-Amosov type*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Vol.13, No.4, Pp.82-95.
96. Markeev A.P. *Teoreticheskaya mekhanika: uchebnik dlya universitetov [Theoretical Mechanics: A Textbook for Universities]*. Moskva, CheRo, 1999.
97. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *K probleme reduksii ploskoj zadachi teorii uprugosti k posledovatel'nosti odnomernykh kraevykh zadach [Reduction of the plane problem of elasticity theory to a sequence of one-dimensional boundary-value problems]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1997, Vol.3, No.1, Pp.69-80.

98. Amosov A.A., Knyazev A.A., Zhavoronok S.I. *O reshenii nekotorykh kraevykh zadach o ploskom napryazhennom sostoyanii krivolinejnoj trapetsii* [On solution of 2D-problem of stressed curvilinear trapezoid]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1999, Vol.5, No.1, Pp.60-72.
99. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leont'ev K.A. *O reshenii nekotorykh zadach o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashheniya v trekhmernoj postanovke* [About solving some problem on the stressed-strained state thick anisotropic shells of revolution in three-dimensional statement]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2004, Vol.10, No.3, Pp.301-310.
100. Zhavoronok S.I., Leont'ev A.N., Leont'ev K.A. *Analiz skhodimosti resheniya pri raschete tolstostennykh obolochek vrashheniya proizvol'noj formy* [Analysis of thick-walled rotation shells based on Legendre polynomials]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2010, Vol.6, Nos.1-2, Pp.105-111.
101. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskii L.N. *The Generalized Routh Equations in the Plate Theory of Nth Order and their Use in Problems of Normal Wave Dispersion in Heterogeneous Waveguides*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, No.7, Pp.2010-2018.
102. Kulikovskij A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenij* [Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moskva, Fizmatlit, 2000, 608 p.
103. Zhavoronok S.I., Rabinskij L.N. *Osesimmetrichnaya zadacha nestatsionarnogo vzaimodejstviya akusticheskoy volny davleniya s uprugoj obolochkoj vrashheniya* [Axisymmetric problem of unsteady interaction of acoustic pressure waves with elastic shell of revolution]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2006, Vol.12, No.4, Pp.541-554.
104. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Rabinskij L.N. *Vzaimodejstvie obolochki srednej tolshhiny s akusticheskoy volnoj* [Interaction of a medium-thickness shell and an acoustical wave]. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2010, Vol.17, No.2, Pp.127-135.

Поступила в редакцию 26 мая 2022 года.

---

Сведения об авторах

Жаворонок Сергей Игоревич – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [zhavoronok@iam.ras.ru](mailto:zhavoronok@iam.ras.ru)

Курбатов Алексей Сергеевич – к.т.н., н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [defunt@inbox.ru](mailto:defunt@inbox.ru)



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются статьи, ранее не опубликованные и не предназначенные к публикации в других изданиях. Рукописи проходят независимое одностороннее слепое рецензирование, на основании результатов которого редакционная коллегия решает вопрос об опубликовании. Просьба о переработке рукописи не означает ее принятие; после исправления рукопись снова рассматривается рецензентом.

### **В журнале публикуются развернутые статьи и краткие сообщения.**

Объем развернутых статей ограничен 20-ю страницами (включая рисунки, таблицы, список литературы). Авторы должны предъявлять повышенные требования к языку рукописи. Оригинал рукописи должен быть подписан всеми соавторами.

Краткие сообщения – это рукописи объемом 5-6 страниц (включая краткую аннотацию, рисунки, таблицы и список литературы), в которых излагаются принципиально новые результаты и законченные решения локальных задач, изложение которых не требует больших печатных объемов. Краткие сообщения имеют приоритет по скорости опубликования.

### **В редакцию должны быть представлены:**

- 1) представление от учреждения, в котором выполнена работа;
- 2) рукопись на бумажном носителе в одном экземпляре с одной стороны белого стандартного листа формата А4 с полями: верхнее – 3,0 см, нижнее – 2,5 см, слева – 4 см, справа – 2 см;
- 3) электронный вариант статьи в редакторе WORD (шрифт Times New Roman Cyr) на электронную почту [iam@iam.ras.ru](mailto:iam@iam.ras.ru);
- 4) экспертное заключение о возможности опубликования материалов работы в открытой печати;
- 5) договор о передаче авторского права (в двух экземплярах);
- 6) декларация об оригинальном характере рукописи с приложением результатов проверки на заимствования, проведенной на одном из специализированных сайтов

<https://www.turnitin.com/ru>

<https://www.antiplagiat.ru/>

<https://copyleaks.com/ru/>

### **Правила оформления статей:**

В статье должна быть приведена на русском и английском языках следующая информация:

- название статьи
- фамилия, имя, отчество каждого автора (полностью)
- место работы каждого автора (без сокращений)
- аннотация (резюме)
- ключевые слова (отделяются друг от друга точкой с запятой)
- список литературы

Кроме того, рукопись должна содержать коды УДК и в виде приложения подробную информацию о каждом авторе (ученая степень, ученое звание, должность по основному месту работы, почтовый адрес, e-mail).

**Аннотация** статьи на русском и английском (Abstract) языках должна содержать **не менее 200–250 слов**, достаточно подробно отражая постановку задачи, используемые методы и полученные в работе результаты. Русскоязычный и англоязычный тексты аннотаций должны быть идентичны. К качеству перевода следует предъявлять повышенные требования.

**Обзорная часть оригинальной статьи** служит для четкого определения места представляемой для публикации работы среди других исследований, проводимых в данном направлении, как в России, так и за рубежом. Тем же целям служит и **Список литературы**, цитируемой в статье. Недопустимо игнорирование в обзорной части работы и списке литературы как отечественных, так и зарубежных достижений и публикаций, соответствующих тематике работы. Ссылки только на собственные публикации (или преимущественно на собственные публикации) при наличии известных работ других авторов недопустимы. Рецензенты и члены редакционной коллегии имеют право рекомендовать автору расширение обзорной части статьи и списка литературы путем включения известных отечественных и зарубежных работ, посвященных тематике публикации.

#### **Правила оформления текста рукописи:**

##### Редактор WORD.

Текст рукописи: Шрифт Times New Roman. Название работы – полужирный 13 шрифт, прописные буквы (верхний регистр), в центре строки. Основной текст рукописи (включая заголовки разделов, названия таблиц и подписи к рисункам) – 12 шрифт. Межстрочный интервал – одинарный. Под названием работы через 1 пробел набираются фамилии и инициалы авторов, еще через 1 пробел курсивом – название организации, в которой работают авторы. Ниже через 2 пробела следует резюме работы. Ниже через 1 интервал – ключевые слова. Далее следует вся вышеперечисленная информация на английском языке. Затем через 2 интервала идет основной текст статьи, разбитый, если это требуется, на разделы, занумерованные арабскими цифрами и снабженные заголовками. Названия разделов располагаются в центре строки через 2 пробела после предыдущего раздела. Заголовки разделов набираются прописными буквами (верхний регистр) жирным шрифтом, заголовки подразделов – строчными буквами (нижний регистр) жирным шрифтом (Например: **1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА.... 1.1. Задачи....**). Разделы **ВВЕДЕНИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ, ВЫВОДЫ** не нумеруются. После названия через один пробел следует текст раздела. Абзацы раздела начинаются с красной строки (отступ слева 1 см). Не допускаются переносы слов в конце строки. Текст должен быть выровнен по ширине страницы. Рукопись завершается списком литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте (в тексте рукописи ссылки приводятся по порядку – 1, 2, 3 и т.д.). Рисунки оформляются только в черно-белом варианте, толщина линий не менее 0,75пт. Рисунки должны быть вставлены в текст по месту. Через пробел после подписи к рисунку идет основной текст. Рисунки не должны быть загромождены излишними надписями. Все пояснения приводятся в тексте. Фотографии должны быть высокого качества.

Формулы нумеруются с правой стороны арабскими цифрами в круглых скобках. Если группа формул занимает несколько строк, то номер ставится напротив средней формулы группы. Между формулой и текстом дополнительные пробелы не нужны. Формулы отодвигаются от левого края текста на 2 см. Формулы должны быть набраны в редакторе Math Type (или Equation 2.0 и выше).

Таблицы помещаются в текст статьи и обозначаются сверху как Таблица 1, Таблица 2 и т.д. в правом углу строки. Ниже, в центре строки, помещается заголовок таблицы, если он необходим, далее – текст таблицы.

Список литературы приводится по порядку упоминания в тексте и оформляется в соответствии с ГОСТом. В тексте ссылки на литературные источники приводятся в квадратных скобках: [1], [1,2] или [3-5,6].

Список литературы должен быть также в обязательном порядке приведен в романском алфавите, озаглавлен References и составлен по следующим правилам:

- Все англоязычные ссылки переписываются в References из основного списка цитируемой литературы без изменений.
- Статьи, оригиналы которых выходят на русском языке, но при этом имеют переводные версии, публикуемые в англоязычном варианте в зарубежных издательствах, должны быть приведены в Reference в англоязычном варианте (включая англоязычное название статьи, журнала и выходные данные англоязычного издания). Если автор по каким-то причинам не хочет ссылаться на англоязычную версию своей статьи (например, не уверен в ее существовании или не знает англоязычных выходных данных), допустима ссылка на русскоязычный вариант (см. оформление ниже).
- Печатные работы, опубликованные только на русском языке, должны быть приведены в References следующим образом:
  - 1) англоязычный вариант ФИО авторов;
  - 2) транслитерация в романский алфавит названия работы;
  - 3) перевод на английский язык названия работы (приводится в квадратных скобках);
  - 4) транслитерация названия журнала (для журнальных статей) / транслитерация названия сборника (для статьи из сборника) / транслитерация названия издательства (для монографий) / транслитерация названия конференции (для трудов конференции);
  - 5) выходные данные публикации в формате: год (цифрами), том – Vol., выпуск – Iss., номер – No., страницы – Pp., количество страниц в монографиях, учебниках – p.

Для проведения транслитерации следует использовать систему транслитерации по ГОСТ 7.79-2000 Система Б. Транслитерация названия журнала Механика композиционных материалов и конструкций: Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii.

Ниже приведен пример списка Литературы и соответствующего ему списка References.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pirondi A., Moroni F. *An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metaljoints* // Intern. J. of Adhesion & Adhesives. – 2009. – Vol.29. – Pp.796-805.
2. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Some result of the detwinning process in TiNi shape memory alloys* // Scripta Materialia. – 1999. – Vol.41. – No.12. – Pp.1273-1281.
3. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования,*

- определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
4. Горшков А.Г., Амар Абдул Карим Салман, Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар деформируемым цилиндрическим телом по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – №3. – С.82.
  5. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Панин С.В. Термопластический изгиб круговых композитных пластин на основании Винклера // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.209-219.
  6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
  7. Волков-Богородский Д.Б. Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связанных задачах механики сплошных сред // Всеросс. науч.-практич. конф. “Инженерные системы-2008”. Сборник трудов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С.123-138.

## REFERENCES

1. Pirondi A., Moroni F. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metaljoints. Intern. J. of Adhesion & Adhesives, 2009, Vol.29, Pp.796-805.
2. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. Some result of the detwinning process in TiNi shape memory alloys. Scripta Materialia, 1999, Vol.41, No.12, Pp.1273-1281.
3. Movchan A.A., Kazarina S.A. Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems. Physical mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
4. Gorshkov A.G., Amar Abdul Karim Salman, Tarlavskij D.V., Fedotenkov G.V. Udar deformiruemyim tsilindricheskim telom po uprugomu poluprostranstvu [Beat the deformable cylindrical body on elastic half-space]. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 2004, No.3, Pp.82-96. (переводная версия журнала существует, но информация о переводе статьи отсутствует)
5. Pleskachevskij YU.M., Starovojtov EH.I., Leonenko D.V., Panin S.V. Termoplasticheskij izgib krugovykh kompozitnykh plastin na osnovanii Vinklera [Thermoplastic bending of circular composite plates based on Winkler]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.2, Pp.209-219.
6. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. Mekhanika mnogoslujnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
7. Volkov-Bogorodskij D.B. Primenenie analiticheskikh raschetov na osnove metoda blokov v svyaznykh zadachakh mekhaniki sploshnykh sred [The use of analytical calculations based on the method of connected blocks in the problems of continuum mechanics]. Vserossiyskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya “Inzhenernye sistemy-2008”, Sbornik trudov, Moskva, Rossijskij universitet druzhby narodov, 2008, Pp.123-138.

**Подписка на журнал “Механика композиционных материалов  
и конструкций” на 2022 год**

(4 выпуска в год, периодичность – 1 выпуск в квартал)

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС: ПН170

в каталоге «Подписные издания» официального каталога АО «Почта России»  
<https://podpiska.pochta.ru/>

Комплекты журнала, его отдельные номера и статьи  
в электронном виде доступны по подписке на сайте Научной электронной  
библиотеки: [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)

Подписку можно также оформить в редакции журнала “Механика  
композиционных материалов и конструкций”:

125040, г. Москва, Ленинградский проспект, д.7, стр.1,  
ФГБУН Институт прикладной механики РАН,  
телефон: (495)946-18-06, e-mail: [iam@iam.ras.ru](mailto:iam@iam.ras.ru).